

TD4: Maths.

Exercice 1.13. Soient $A(1, 2, 4)$, $B(2, 3, 6)$, $C(1, 0, 2)$ et $D(2, 2, 2)$ des points dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

- (1) Trouver la distance entre le point D et le plan passant par A , B et C .
- (2) Trouver la distance entre le point D et la droite (AB) .
- (3) Trouver la distance entre la droite (AB) et la droite (CD) .

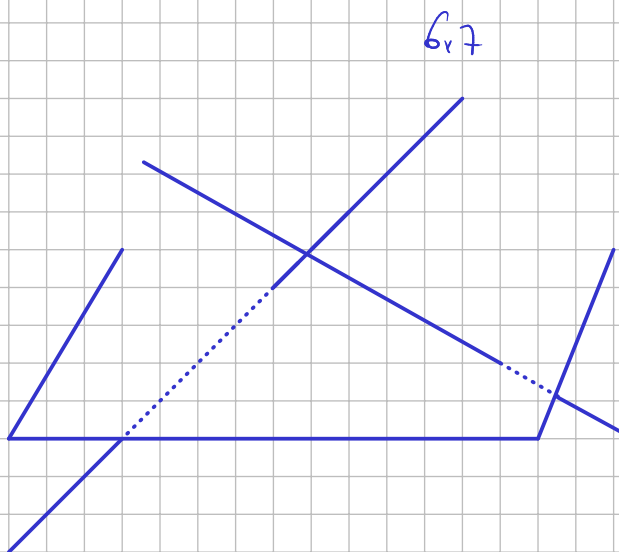
$$(AB) \parallel (CD) ? \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \neq \lambda \vec{CD} \text{ donc faux.}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\det(\vec{AC}, \vec{AB}, \vec{CD})| = |\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{CD})|$$

$$|\vec{AC} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{CD})| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = |0 - 4 - 2| = |-6| = 6.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21} \quad \text{dist}(AB, AC) = \frac{2\sqrt{21}}{2}$$



Exercice 1.14. On considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par les représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \quad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

On admet que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont non coplanaires.

Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et orthogonale à ces deux droites.

- (1) Vérifier que le point $A(2; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}_1$.
- (2) Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite $\mathcal{D}_1$ et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite $\mathcal{D}_2$.
Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?
- (3) (a) Calculer le produit vectoriel $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.
(b) Vérifier que le vecteur $\vec{v} = (1; -2; -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.
- (4) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A , et dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{v}$.
(a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.
(b) Montrer que la droite $\mathcal{D}_2$ coupe le plan $\mathcal{P}$ à un unique point B dont on précisera les coordonnées.
- (5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v} = (1; -2; -3)$, et passant par le point B .
(a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
(b) Les droites $\mathcal{D}_1$ et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
(c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

1. $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad t=0, (2, 3; 0) = A \in \mathcal{D}_1.$

2. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Non, car $1 \neq \lambda 0$

3a. $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{n}$

b. $\vec{n} = -\vec{v}$ donc $\vec{v} \perp \vec{u}_1$ et $\vec{v} \perp \vec{u}_2$.

(4). $A \in \mathcal{P} \quad \vec{u}_2$ vecteur normal de $\mathcal{P}$.

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{P} : -5x - 4y + z + d = 0 \quad A \in \mathcal{P}.$

$$-5 \times 2 - 4 \times 3 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow -10 - 12 + d = 0 \Rightarrow d = 22.$$

$$\mathcal{P} : -5x - 4y + z + 22 = 0 \Leftrightarrow 5x + 4y - z - 22 = 0.$$

b. $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}$

$$\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{P} = \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \\ 5x + 4y - z - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow -25 + 10t' - 4 + 4t' - 5 - 22 = 0.$$

$$14t' = -76 \Leftrightarrow t' = 4.$$

$$\mathcal{D}_2 n\mathcal{P} = (3, 3, 5) = \mathcal{B},$$

$$(5). \Delta : \mathcal{B} + s \vec{v} = \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 3 - 2s \\ z = 5 - 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R},$$

$\mathcal{D}_1 n\Delta :$

