

TD24: Maths.

Exercice 6.3. (1) Montrer que $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

(2) Proposer un encadrement similaire pour $\sin x$ et donner une valeur approchée de $\sin \frac{1}{10}$ à 10^{-3} .

$$T(\cos, 0, 3) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4 \varepsilon(x) = \varepsilon(x^4)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$2. T(\sin, 0, 3) = \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \varepsilon(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^5}{120} \cos(x).$$

$$\Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60}$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} \leq \sin\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{660000}$$

$$\therefore \frac{599}{6000} \leq \sin\left(\frac{1}{10}\right) \leq \frac{59901}{600000} \quad 0,99833 \leq \sin\left(\frac{1}{10}\right) \leq 0,99835$$

Exercice 6.4. La fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive explicite, c'ad, sa primitive ne peut pas être exprimée, au moyen des opérations algébriques, en termes de fonctions usuelles. Par conséquent, à toute paire $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale $\int_a^b e^{-x^2} dx$ ne peut qu'être calculée numériquement.

(1) Montrer que pour tout réel x , il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} e^{-\theta x^2}$.

(2) En déduire une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ et donner un majorant de l'erreur commise.

$$D(0, 4) \rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^{\theta x} \quad \text{On peut choisir un } \theta \in]0, 1[\text{ tel que } \frac{c}{\theta} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} e^{-\theta x^2}$$

$$\text{car } 0 < c < x.$$

???

