

(2) Mêmes questions mais au point $x = 1$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln x$; 2. $f(x) = x \ln x$; 3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

$$\ln(x) = \ln(1 + (x-1))$$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$\Rightarrow \ln(1+(x-1)) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

$$\Rightarrow \ln(x) - (x-1) = -\frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$$

2. $(1+(x-1)) \ln(1+(x-1))$

$$= (1+(x-1)) \left((x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2) \right)$$

$$= (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \cancel{(x-1)^2} + o((x-1)^2)$$

$$x \ln(x) - (x-1) > 0 \Rightarrow x \ln(x) > x-1.$$

$$3. \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1+(x-1))}{1+(x-1)} = \frac{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)}{1+(x-1)} = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

$$\frac{\ln(x)}{x} < x-1.$$

$$\begin{array}{r|l} y - \frac{y^2}{2} & 1+y \\ - y - y^2 & y - \frac{3}{2}y^2 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2}y^2 \\ & \hline & 0 \end{array}$$

Exercice 6.17. Etudier les branches infinies du graphe de chacune des fonctions f suivantes :

$$1. f(x) = \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{4+x^2}; \quad 2. f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{\sqrt{4+x^2}}.$$

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{4+x^2}$$

$$z = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + \frac{1}{z^3}\right)^{1/3} - \left(4 - \frac{1}{z^2}\right)^{1/2} \\ &> \left(\frac{z^3+1}{z^3}\right)^{1/3} - \left(\frac{4z^2-1}{z^2}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{z} (z^3+1)^{1/3} - \frac{1}{|z|} (4z^2-1)^{1/2}. \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} z \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow 0^- \end{array} \right.$$

$$(1+y)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + \varepsilon(y^2)$$

$$(1+z^3)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}z^3 + \varepsilon(z^3)$$

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \varepsilon(y^2)$$

$$(1+4z^2)^{1/2} = 1 + 2z^2 + \varepsilon(z^2).$$

$$\text{pour } x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow z \rightarrow 0^+$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(z) &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{3}z^3\right) - \frac{1}{z} (1+2z^2) + \varepsilon(z^2) \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{3}z^2 + \varepsilon(z^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^2} + \varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ pour } x \rightarrow +\infty$$

$$\text{pour } x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow z \rightarrow 0^-$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{3}z^3\right) + \frac{1}{z} (1+2z^2) + \varepsilon(z^2) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{z} + 2z + \varepsilon(z^2) = \frac{2}{z} + 2z + \frac{1}{3}z^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^2}$$

Exercice 6.18. On considère la fonction f définie sur $I =]-\pi, \pi[\setminus \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

- (1) Vérifier que pour $x \in I$, on a $f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x)}$. En déduire qu'on peut prolonger f en $-\pi/2$ et $\pi/2$ de manière à obtenir une fonction continue et dérivable sur $] - \pi, \pi[\setminus \{0\}$, qu'on notera toujours f .
- (2) On pose $f(0) = 0$. A l'aide de l'expression précédente, calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4. En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- (3) Calculer la fonction $f'(x)$, $x \in]-\pi, \pi[$ et démontrer que f est de classe C^1 sur $] - \pi, \pi[$.

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2} \sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}(\pi-2)}{\pi\cancel{\sqrt{2}}} = \frac{\pi-2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

On prolonge f en $\pm \frac{\pi}{2}$ en posant:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} & \text{si } x \in I \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{DL de } \sin - x \cos(x) &= \cancel{x} \frac{x^3}{6} - x \left(1 - \frac{x^2}{2} \right) + \varepsilon(x^4) \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \varepsilon(x^4) \end{aligned}$$

$$\text{DL de } x \sin(x) = x \left(x - \frac{x^3}{6} \right) + \varepsilon(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{6} + \varepsilon(x^4).$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{3} x^3 + \varepsilon(x^4)}{x^2 - \frac{1}{6} x^4 + \varepsilon(x^4)} = \frac{x^2 \left(\frac{1}{3} x + \varepsilon(x^2) \right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{6} x^2 + \varepsilon(x^2) \right)}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{3} x & 1 + \frac{1}{6} x^2 \\ - \frac{1}{3} x + \frac{1}{18} x^3 & \frac{1}{3} x \\ \hline \frac{1}{18} x^3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} x + \varepsilon(x^2).$$

Donc, on peut prolonger f en 0

