

Exercice 6.18. On considère la fonction f définie sur $I =]-\pi, \pi[\setminus \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}.$$

- (1) Vérifier que pour $x \in I$, on a $f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x)}$. En déduire qu'on peut prolonger f en $-\pi/2$ et $\pi/2$ de manière à obtenir une fonction continue et dérivable sur $] -\pi, \pi[\setminus \{0\}$, qu'on notera toujours f .
- (2) On pose $f(0) = 0$. A l'aide de l'expression précédente, calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4. En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- (3) Calculer la fonction $f'(x)$, $x \in]-\pi, \pi[$ et démontrer que f est de classe C^1 sur $] -\pi, \pi[$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4 \sin^2 x}.$$

DL à l'ordre 5:

$$x^2 - \sin^2 x = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right)^2 + \varepsilon(x^5) = x^2 - \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} \right) + \varepsilon(x^5) = \frac{x^4}{3} + \varepsilon(x^5)$$

$$x^2 \sin^2 x = x^2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right)^2 = x^2 \left(x^2 - \frac{2x^4}{3} \right) + \varepsilon(x^5) = x^4 + \varepsilon(x^5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{3} + \varepsilon(x^5)}{x^4 + \varepsilon(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x)} = \frac{1}{3}. \quad \text{ok.}$$

Exercice 7.1. Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $y' - 2xy = x$,

(2) $y' + y = \sin 2x$,

(3) $y' + 2y = e^x$,

(4) $y' + y = \cos x + \sin x$,

(5) $y' - 5y = e^{5x}$,

(6) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

(7) $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$,

(8) $(1 + x^2)y' + 2xy = x + e^x$.

* (1) $\frac{y'}{y} = 2x$. $\Leftrightarrow \ln|y|' = 2x \Rightarrow \ln|y| = \int 2x dx = x^2 + C$
 $\Rightarrow |y| = Ce^{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow y = Ce^{x^2} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

* Soit° particulière. (méthode de la variat° de la constante)

On cherche $y_0(x): C(x)e^{x^2}$

$$y_0' - 2xy_0 = C'e^{x^2} + \cancel{C'2xe^{x^2}} - \cancel{2xy_0} = x$$

$= 2xy_0$

$$\Rightarrow C' = xe^{-x^2} \Rightarrow C = \int xe^{-x^2} dx$$

$$u = x^2 \quad du = 2x \Rightarrow C = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = \frac{1}{2} e^{-u} = \frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$y_0 = -\frac{1}{2} \cancel{x^{-x^2}} \cancel{e^{x^2}}$$

* Solut. générale: $y = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}$.

2. $y' + y = 0 \quad y_1 = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}.$

* Solut. part.

$$y_0(x) = C(x)e^{-x}.$$

$$y_0' + y_0 = C'e^{-x} - \cancel{C'e^{-x}} + \cancel{y_0} = \sin(2x).$$

$$C' = e^x \sin(2x) \Rightarrow C = \int e^x \sin(2x) dx.$$

$$u' = e^{2x} \quad u = e^{2x}$$

$$v = \sin(2x) \quad v' = 2\cos(2x)$$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \cos(2x) e^x dx$$

$$u' = e^x \quad u = e^x$$

$$v = \cos(2x) \quad v' = -2\sin(2x)$$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \left(\cos(2x) e^x + 2 \int \sin(2x) e^x dx \right)$$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \cos(2x) e^x - 4 \int \sin(2x) e^x dx$$

$$5 \int \sin(2x) e^x dx = e^x (\sin(2x) - 2 \cos(2x)) \Rightarrow \int \sin(2x) dx = \frac{e^x}{5} (\sin(2x) - 2 \cos(2x))$$

Donc $y_0 = \frac{1}{5} (\sin(2x) - 2\cos(2x))$

* Solut° générale : $y = (e^{-x} + \frac{1}{5} (\sin(2x) - 2\cos(2x)))$.

⑥ $y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \quad (E)$

$y' + 2xy = 0 \quad (E_h)$

$y_h = Ce^{-x^2}, C \in \mathbb{R}.$

* Solut° particulière.

y_0 de la forme : $y_0 = C(x)e^{-x^2}$

$y_0' + 2xy_0 = C'(x)e^{-x^2} - \cancel{2xe^{-x^2}C(x)} + 2xy_0 = 2xe^{-x^2}$

$\Rightarrow C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2$

* Solut° générale : $y = Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}.$

⑦ $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2} \quad (E)$

$(1+x^2)y' + xy = 0 \quad (E_h)$

$\Leftrightarrow y' + \frac{x}{1+x^2} y = 0$

$\int \frac{x}{1+x^2} dx \quad u = 1+x^2 \quad du = 2x dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = -\frac{1}{2} \ln|u| + C = -\frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$

$Ce^{-\ln(\sqrt{1+x^2})} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}.$

* Solut° particulière

y_0 de la forme $\frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

$$(1+x^2) y_0' + x y_0 = \cancel{(1+x^2)} \frac{C'(x) \sqrt{1+x^2} - \cancel{C(x)} \cancel{x} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{(1+x^2)}} + x y_0 = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow C'(x) \sqrt{1+x^2} - \cancel{C(x)} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + x y_0 = \sqrt{1+x^2}$$

$$\Rightarrow C'(x) = 1.$$

$$\Rightarrow C(x) = x.$$

$$\star \text{ y générale: } y(x) = \frac{C+x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

$$⑧ (1+x^2) y' + 2xy = x e^x \quad (E).$$

$$(1+x^2) y' + 2xy = 0 \quad (E_h)$$

$$-\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx = \ln |1+x^2| dx \quad y_h(x) = \frac{C}{1+x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

* Sol part.

$$\text{On cherche un } y_0 = \frac{C(x)}{1+x^2}.$$

$$(1+x^2) y_0' + 2x y_0 = \cancel{(1+x^2)} \frac{C'(x) (1+x^2) \cancel{2x} \cancel{C(x)}}{\cancel{(1+x^2)}^2} + 2x y_0 = x e^x$$

$$C'(x) = x e^x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} x^2 + e^x.$$

$$y(x) = \frac{C + \frac{1}{2} x^2 + e^x}{1+x^2}.$$

Exercice 7.2. Résoudre des équations différentielles sur des intervalles I spécifiés :

(1) $xy' + y = \sin x$, $I =]0, +\infty[$,

(2) $\sin(x) y' + \cos(x) y = \sin^2(x)$, $I =]0, \pi[$;

(3) $xy' + y = e^x$, $I =]0, +\infty[$;

(4) $\sin(x) y' - \cos(x) y = 1$, $I =]0, \pi[$;

(5) $\sqrt{1-x^2} y' + y = 1$, $I =]-1, 1[$;

(6) $(x+1)y' + y = 1 - 2x$, $I =]-1, +\infty[$.

1. $y' + \frac{1}{x} y = \sin(x)$ (E)

$$y' + \frac{1}{x} y = 0 \quad (E_h)$$

$$y_h = e^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}.$$

On cherche y_0 de la forme $\frac{C(x)}{x}$

$$y_0' + \frac{1}{x} y_0 = \frac{C'(x)x - C(x)}{x} + \frac{1}{x} y_0 = \sin(x)$$

$$C'(x) = \sin(x), \quad C(x) = -\cos(x).$$

$$y_0 = \frac{-\cos(x)}{x}.$$

$$y = \frac{C - \cos(x)}{x}.$$

