

TD 13: Maths:

Exercice 7.3. On considère l'équation différentielle (E) : $xy' - (1+x)y = x^2$.

(1) Résoudre l'équation (E) sur $I_1 =]0, +\infty[$ et sur $I_2 =]-\infty, 0[$.

(2) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$x y' - (1+x)y = x^2 \quad (E)$$

$$(E_h) \quad y' - \frac{1+x}{x} y = 0.$$

$$y_h(x) = e^{\int \frac{1+x}{x}} C e^{\ln|x|+x} = C e^{\ln|x|+x} = C |x| e^x \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Sol particulière.

$$y_p(x) = C(x) |x| e^x$$

:

$$y = C x e^{x-x}, C \in \mathbb{R}. \text{ Sol de (E).}$$

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$

Puisqu'on veut une sol de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on prend une sol y_1 sur I_1 , une sol y_2 sur I_2 ,

et on ajoute les condit°.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y_2(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y_1'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y_2'(x). \end{cases}$$

On voit que $y_1(x) = C_1 x e^{x-x}, C_1 \in \mathbb{R}$
 " " $y_2(x) = C_2 x e^{x-x}, C_2 \in \mathbb{R},$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} C_1 x e^x - x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} y_2(x) - 0.$$

$$y_1'(x) = C_1 (e^x + x e^x) - 1$$

$$y_2'(x) = C_2 (e^x - x e^x) - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} C_1 (e^x + x e^x) - 1 = C_1 - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} C_2 (e^x - x e^x) - 1 = C_2 - 1.$$

$$y_1 + y_2 \text{ est } C^1 \Leftrightarrow C_1 = C_2,$$

les solut^o sur $\mathbb{R}$ sont:

$$y(x) = C x e^x - x, \forall C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7.4. On considère l'équation différentielle (E) : $x(1-x)y' + y = x$.

- (1) Résoudre l'équation (E) sur $] -\infty, 0[$, $] 0, 1[$ et $] 1, +\infty[$.
- (2) Montrer que (E) admet une unique solution sur $] -\infty, 1[$.
- (3) Montrer que (E) n'admet pas de solutions sur $] 0, +\infty[$.

1. Sur I_1 :

$$x(1-x)y' + y = x. \quad (E)$$

$$x(1-x)y' + y = 0 \quad (E_h)$$

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \Rightarrow A = -1$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

$$- \ln|x| + \ln|1-x| + c = C + \ln\left|\frac{1-x}{x}\right|$$

$$\Rightarrow y = C \frac{1-x}{x} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

* Sol particulière.

$$y_0 = C(x) \frac{1-x}{x}.$$

$$\begin{aligned} x(1-x) y_0' + y &= x(1-x) \left(C'(x) \frac{1-x}{x} + C(x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right) \\ &= C'(x) (1-x)^2 - \cancel{C(x) \frac{1-x}{x}} + \cancel{C(x) \frac{1-x}{x}} = x. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C'(x) = \frac{x-1+1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$C = \ln|1-x| - \frac{1}{1-x}.$$

$$y = C \frac{1-x}{x} + \ln|1-x| - \frac{1}{1-x}.$$

Sur $]0, 1[$, On a $y = C_1 \frac{1-x}{x} + \ln(1-x) - \frac{1}{x} + C_2 \frac{1-x}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{1-x}.$

Il faut:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} C_1 \frac{1-x}{x} + \ln(1-x) - \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} C_2 \frac{1-x}{x} + \ln(1-x) - \frac{1}{x}. \\ \rightarrow C_1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 0 + \frac{1}{x} & \end{aligned}$$

$$\text{Si } C_1 = 1, \frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1.$$

Même raisonnement pour y_2 . Donc $C_1 = C_2 = 1$

$$y' = (x-y) \frac{1}{x(1-x)} = \frac{\left(x - \frac{1-x}{x} - \ln(1-x) \right) + \frac{1}{x}}{x(1-x)} = \frac{(x-1-\ln(1-x))}{x(1-x)}.$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x(1-x)} - \frac{\ln|1-x|}{x(1-x)}$$

