TD44. Maths

**Exercice 7.5.** Intégrer sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' - y = x^2 + x$,

(2) $y'' - 3y' + 2y = xe^x$,

(3) $y'' - 2y' + y = xe^x + 2\cos x$,

(4) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin x$,

(5) $y'' + y' = x + \sin x$,

(6) $y'' + y' - 2y = e^x \sin x$,

(7) $y'' + 2y' + 5y = \cos(x)$,

(8) $y'' + y' + y = 13\cos(2x)$.

1. $y'' - y = 0 \quad (E_h)$

$\to z^2 - 1 = 0 \quad (E_c) \qquad S_{E_c} = \{-1, 1\}.$

Solut° de $(E_h)$

$$y_h(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

Si les solutions étaient complexes, avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = \overline{z_2}$

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + c_2 e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$$

avec $\alpha = \mathrm{Re}(z_1)$, $\beta = \mathrm{Im}(z_1)$

Les solut° réelles sont :

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

---

* Solut° particulière :

Si le terme non homogène est de la forme $e^{\alpha x}P(x)$ avec $P(x)$ un polynôme, de degré $n$

$\Rightarrow$ On cherche une solut° de la forme $y_0(x) = e^{\alpha x} Q(x)$. tq $\deg(Q) = n$.

Mais si $\alpha$ est racine de $(E_c)$, on cherche une solution de la forme $e^{\alpha x} Q(x) x^m$ avec $m$ la multiplicité de $\alpha$.

Comme $\alpha = 0$ (ici), on a $m = 0$.

Donc, $y_0(x) = ax^2 + bx + c$.

$$2a - ax^2 - bx - c = x^2 + x$$

$$= -ax^2 - bx - (c - 2a) = x^2 + x$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \\ c - 2 = 0 \Rightarrow c = 2. \end{cases}$$

Donc $y_0(x) = -x^2 + x + 2$.

* Solut° générale de $(E)$ :

$$y(x) = y_h(x) + y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - x^2 + x + 2 \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

② $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$. $(E)$

$y'' - 3y' + 2 = 0$ $(E_h)$

$R^2 - 3R + 2 = 0$ $(E_c)$

$\Leftrightarrow (R-1)(R-2) \Rightarrow R_1 = 1, R_2 = 2.$

$$y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

1 solut° de multiplicité 1, donc

$y_0(x) = e^{x}(ax + b)x = e^{x}(ax^2 + bx)$.

$y_0'(x) = e^{x}(ax^2 + bx) + e^{x}(2ax + b) = e^{x}(ax^2 + x(2a + b) + b)$.

$y_0''(x) = e^{x}(ax^2 + x(2a + b) + b) + e^{x}(2ax + 2a + b) = e^{x}(ax^2 + x(4a + b) + (2a + 2b))$

$y_0'' - 3y_0' + 2y_0 = xe^x$

$\Leftrightarrow e^x(ax^2 + x(4a+b) + (2a+2b)) - e^x(3ax^2 + x(6a+3b) + 3b) + e^x(2ax^2 + 2bx) = xe^x$

$\Leftrightarrow e^x(x^2(\cancel{a} - \cancel{3a} + \cancel{2a}) + x(\cancel{4a} - b - \cancel{6a} - 3b + \cancel{2b}) + 2a + 5b) = xe^x$

$\Leftrightarrow e^x(-4bx + 2a + 5b) = xe^x$

$\Leftrightarrow -4bx + 2a + 5b = x.$ $\rightarrow$ <u>problème ici.</u>

$\Rightarrow \begin{cases} -4b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{4} \\ a = +\frac{5}{8}. \end{cases}$

$\Rightarrow y_0(x) = e^x\left(\frac{5}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right).$

③. $y'' - 2y' + y = xe^x + 2\cos(x).$ $(E)$

Solut° de $(E_c) \Rightarrow (z-1)^2 \Rightarrow z = 1.$

$\Rightarrow y_h(x) = e^x(C_2x + C_1)$, $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

+ Première solut° particulière

$y'' - 2y' + y = xe^x.$

$\Rightarrow y_0(x) = (ax+b)x^2e^x$ $\rightarrow$ car 1 solut° de multiplicité 2 de $(E_c)$

$= (ax^3 + bx^2)e^x.$

$y'(x) = e^x(ax^3 + bx^2) + e^x(3ax^2 + 2bx). = e^x(ax^3 + x^2(b+3a) + 2bx)$

$y''(x) = e^x(ax^3 + x^2(b+3a) + 2bx) + e^x(3ax^2 + (2b+6a)x + 2b)$

$= e^x(ax^3 + x^2(b+6a) + x(4b+6a) + 2b)$

$y_0'' - 2y_0' + y_0 = xe^x$

$\Rightarrow e^x(ax^3 + x^2(\cancel{b} + \cancel{6a}) + x(6a + \cancel{4b}) + 2b) - e^x(2ax^3 + x^2(\cancel{6a} + \cancel{2b}) + \cancel{4bx}) + e^x(ax^3 + x^2(\cancel{b} + 3a) + 2bx) = xe^x$

$\Rightarrow e^x(3ax^2 + x(6a+2b) + 2b)$ <u>marche pas</u> ?

Le prof trouve $e^x(6ax + 2b) = xe^x \Rightarrow y_1(x) = \frac{1}{6}x^3e^x.$

* deuxième solut° particulière.

$$y'' - 2y' + y = 2\cos(x).$$

$z = i$ pas racine de $(E_c)$

$\Rightarrow y_2(x) = a\cos(x) + b\sin(x).$

$y_2'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$

$y_2''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x).$

$$y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x) = 2\cos(x)$$

$\Leftrightarrow a\cos(x) + b\sin(x) - 2a\sin(x) + 2b\cos(x) - a\cos(x) - b\sin(x). = 2\cos(x).$

$\Leftrightarrow \cos(x)(\cancel{a} + 2b - \cancel{a}) + \sin(x)(\cancel{b} - 2a - \cancel{b}) = 2\cos(x)$

$\Leftrightarrow -b\cos(x) + + a\sin(x) = \cos(x).$

$\Rightarrow b = 1 \quad a = 0.$

$\Rightarrow y_2(x) = -\sin(x).$

Solut° générale : $y(x) = y_H(x) + y_1(x) + y_2(x).$

④ $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}\sin(x).$ $(E)$

$z^2 + 2z + 2 = 0 \quad (E_c)$

$\Delta = -4. \Rightarrow z = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1-i, -1+i.$

$y_H(x) = C_1 e^{-x}\cos(-x) + C_2 e^{-x}\sin(x).\ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Comme $-1-i$ est de multiplicité 1, on a :

$y_0(x) = (ax^2 + bx)\, e^{-x}\sin(x) + (cx^2 + dx)e^{-x}\cos(x)$

$y_0'(x) = 2axe^{-x}\sin(x) - (ax^2 + b)\, e^{-x}\sin(x) + (ax^2 + bx)e^{-x}\cos(x) + 2cx\, e^{-x}\cos(x) - (cx^2 + d)e^{-x}\cos(x) - (cx^2 + dx)e^{-x}\sin(x).$

$= ((a-c)x^2 + (2a-d)x + b)e^{-x}\sin(x) + ((a-c)x^2 + (b+2c)x - d)e^{-x}\cos(x).$