

Exercice 1.15. On considère trois points $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 5, 2)$, $C(0, 2, 4)$ dans $\mathbb{R}^3$.

- (1) Montrer que les points A , B , C sont les sommets d'un triangle équilatéral.
- (2) Calculer le produit vectoriel $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ où $O(0, 0, 0)$ est l'origine de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
- (3) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par les trois points O , A et B .
- (4) Donner une représentation paramétrique de la droite (BC) .
- (5) Trouver le volume du parallélépipède de côtés $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$.
- (6) Calculer la distance du point C au plan P .

$$(1) \|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \|\vec{AC}\| \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

↘ équil.

$$(2) \vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \vec{n}$$

(3) $\mathcal{P}$ dirigé par $\vec{OA} \times \vec{OB}$. Donc $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 - 5y+15 + 13z-13 = 0 \Leftrightarrow x-5y+13z=0.$$

$$4. (BC): B+t\vec{BC} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(BC): \begin{cases} x = -1+t \\ y = 5-3t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$5. V(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = |\det(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})| = |\vec{OC} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix} \right| = |-10+52| = 42.$$

$$6. \text{dist}(C, \mathcal{P}) = \frac{|\vec{OC} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{42}{\sqrt{1+25+169}} = \frac{42}{\sqrt{195}} = \frac{14\sqrt{195}}{65}.$$

Exercice 2.1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(1) \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x - z + 3t = 9 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y - z = 1 \\ x + 4y + z = 18 \\ x + 6y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} l_1 \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases} \xRightarrow{l_2 - 2l_1, l_3 - 3l_1} \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -5z = -5 \\ 0x + y - 7z = -7 \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ y - 7z = -7 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{} \begin{cases} x - 2y + 3 = 5 \\ y - 7 = -7 \\ z = 1 \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x + 3 = 5 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} l_1 \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 5y - z = 2 \end{cases} \xRightarrow{l_2 - 2l_1, l_3 - 3l_1} \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ -y - 5z = 1 \\ -y - 5z = -1 \end{cases} \xRightarrow{l_2' - l_3'} \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ -y - 5z = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{} \begin{cases} x + 3y - 7z = 2 \\ y - 5z = 1 \\ z = t, t \in \mathbb{R} \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x + 3(1+5t) - 7t = 2 \\ y = 1+5t \\ z = t \end{cases}$$

$$\xRightarrow{} \begin{cases} x + 3 + 15t - 7t = 2 \\ y = 1+5t \\ z = t \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 1+5t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$(3) \begin{cases} \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2x - z + 3t = 9 \\ 3x - 3y + 2z = 4 \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2y + z + 5t = 3 \\ 6y + 5z + 3t = -5 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{} \begin{cases} x - y - z - t = 3 \\ 2y + z + 5t = 3 \\ z - 6t = -7 \end{cases} \xRightarrow{} \begin{cases} x = 5 - \frac{11}{2}t - 7 + 6t + t + 3 = 1 - \frac{3}{2}t \\ y = \frac{1}{2}(10 - 11t) = 5 - \frac{11}{2}t \\ z = -7 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

t paramètre libre.

