

$$(4) \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - t = 1 \\ 2x + y - 8z + t = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ -y - 2z + 2t = 0 \\ 3y + 6z + t = 2 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ -y - 2z + 2t = 0 \\ 7t = a - 2 \\ z = s, \text{ s.e. } \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 2.4. Soit $(S) : \begin{cases} x - y + az = a \\ x + ay - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

- (1) Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel a , l'ensemble des solutions du système (S) .
- (2) Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, illustrer les trois plans représentés par les équations de (S) .
- (3) Faire le lien entre les résultats obtenus dans les questions (1) et (2) ci-dessus.
- (4) Déterminer les cas où les solutions du système (S) représentent une droite dont on précisera une équation paramétrique.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + az = a \\ x + ay - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + (1-a)z = 1-a \\ (a-1)y + 2z = 2 \end{cases}$$

si $(a-1)^2 \neq 4$, alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{(a-1)}{2}z = \frac{1-a}{2} \\ \frac{(a-1)^2 - 4}{2}z = \frac{(a-1)^2 - 4}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -y - z - 1 = 0 \\ y = z - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Si $a=3$, on a

(z paramètre)

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + \frac{(a-1)}{2}z = \frac{1-a}{2} \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$S: a = -1$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1-t \quad t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

3.1. Sous-espaces vectoriels.

Exercice 3.1. (1) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

- (a) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y\}$.
- (b) $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$.
- (c) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
- (d) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.

① * $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} \in E_1$. Oui car $0 \geq 0$.

* $\forall u, v \in E_1, u+v \in E_1$

* $\lambda \in \mathbb{R}, u \in E_1 \Rightarrow \lambda u \in E_1, u \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} x \geq y \\ x' \geq y' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+x' \geq y+y' \end{matrix} \text{ ok.}$$

non car si $\lambda < 0, x \geq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$. Donc Non.

② * $\vec{0}_{\mathbb{R}^2} \in E_2$. Oui car $0 + 2 \times 0 = 0$.

* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \in E_2 ?$

$$\begin{matrix} x+2y=0 \\ x'+2y'=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+x'+2(y+y')=0 \end{matrix} \text{ ok.}$$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in E_2$.

$x+2y=0 \Rightarrow \lambda x+2\lambda y=0$. ok.

③ * $\vec{0}_{\mathbb{R}^3} \in E_3$? non car $0+0+0 \neq 1$. Donc E_3 pas SEV.

④ * Oui car E_4 est définie par une équation linéaire homogène.

(2) Dans les cas où l'ensemble proposé est un sous-espace vectoriel, indiquer sa nature géométrique.

E_2 : une droite

E_4 : un plan.

Exercice 3.2. Pour tous les cas suivants, indiquer si F est un sous-espace vectoriel de E .

(1) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{(a, b, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(2) $E = \mathbb{R}^4$; $F = \{(0, a, -a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$.

(3) $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ l'espace des fonction continues de $\mathbb{R}$ vers lui-même; $F = \{f \in E : f(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}\}$.

(4) $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : P(1) = 1\}$.

①. $\vec{0}_E \in F$. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$ ok. $\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$ oui.

②. $\vec{0}_E \in F$. pareil. donc oui.

③

