

Exercice 3.3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

$$\left. \begin{array}{l} F \subset G \Rightarrow F \cup G = G \\ G \subset F \Rightarrow F \cup G = F \end{array} \right\} \Rightarrow \text{OK.}$$

Pour la réciproque on raisonne par l'absurde

On suppose donc que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$

$$\Rightarrow \exists v \in F \setminus G \text{ et } \exists w \in G \setminus F$$

Or $v, w \in F \cup G$. Si $F \cup G$ était un SEV, on aurait $v+w \in F \cup G$.

Donc $v+w \in F$ ou $v+w \in G$

Si $v+w \in F$, puisque $v \in F$,

$$(v+w) - v = w \in F \quad (\text{!})$$

Si $v+w \in G$, puisque $w \in G$,

$$(v+w) - w = v \in G \quad (\text{!})$$

Exercice 3.4. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E . On rappelle que

$$F + G = \{f + g : f \in F, g \in G\} = \{u \in E : \exists f \in F \text{ et } \exists g \in G \text{ tel que } u = f + g\}.$$

(1) Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

(2) Montrer que si $G \subset F$, alors on a $F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$.

$F+G$: le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$.

$$(2) F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

$$\text{D'abord } F \cap (G + H) \subset G + (F \cap H)$$

$$\text{Soit } v \in F \cap (G + H)$$

$$\text{Donc } v \in F \text{ et } v = u + w, \quad u \in G, \quad w \in H.$$

$$\text{De l'autre côté, on a } v \in G + (F \cap H)$$

$$v = u + w \text{ avec } u \in G \text{ et } w \in F \cap H.$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow v \in G + H \text{ et } v \in F \\ v \in F \end{array} \right\} v \in F \cap (G + H).$$

3.2. Combinaisons linéaires, familles libres, familles liées.

Exercice 3.5. Soient $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer si la famille $\{u, v, w\}$ est libre ou liée. Dans le cas où la famille est liée, donner une combinaison linéaire non triviale entre les trois vecteurs.

$$u \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}.$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma = 0 & (L_2 - 2L_1) \\ 4\alpha + 2\beta + 6\gamma = 0 & (L_3 - 4L_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ -\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta = \gamma \\ \gamma = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 1, 1)$ est une solut^o donc famille liée.

$$-2u + v + w = \vec{0}.$$

Exercice 3.6. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(1) Les vecteurs u et v sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$?

(2) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont combinaisons linéaires de u et v .

(3) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ?

(4) Si $\mathbb{R}^3$ est rapporté de son repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, montrer que le sous-espace $\text{Vect}(u, v)$ s'identifie à un plan dont on donnera une équation cartésienne.

1. Oui. $\{u, v\}$ génératrice de $\mathbb{R}^3$?

$$w \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. w = \alpha u + \beta v ?$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = a \\ 2\alpha + 5\beta = b \\ 3\alpha + 6\beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = a \\ -3\beta = b - 2a \\ -6\beta = c - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = a \\ -3\beta = b - 2a \\ 0 = (c - 3a) - 2(b - 2a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = c + a - 2b.$$

Si $c + a \neq 2b$. $\Rightarrow$ aucune solut^o. $\{u, v\}$ pas génératrice.

