

Exercice 3.6. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- (1) Les vecteurs u et v sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^3$? Sont-ils générateurs de $\mathbb{R}^3$?
- (2) Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont combinaisons linéaires de u et v .
- (3) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de u et v ?
- (4) Si $\mathbb{R}^3$ est rapporté de son repère usuel $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, montrer que le sous-espace $\text{Vect}(u, v)$ s'identifie à un plan dont on donnera une équation cartésienne.

$\text{Vect}(u, v)$ = sous-espace engendré par u et v .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v ?$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 1 \\ 3\alpha + 6\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ -3\beta = 1 \\ -6\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \\ 3\alpha + 6\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 \\ -3\beta = 0 \\ -6\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \text{ sol.}$$

$$(4) \mathcal{P}: \begin{cases} x = \alpha + 4\beta \\ y = 2\alpha + 5\beta \\ z = 3\alpha + 6\beta \end{cases} \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}: -x + 2y - z = 0.$$

Exercice 3.7. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Peut-on déterminer a et b

pour que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v)$? Et pour que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v)$?

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha u + \beta v.$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = b \\ 4\alpha - 4\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \text{pas compatibles. donc aucune sol.}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta = 1 \\ 4\alpha - 4\beta = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha + \beta = \frac{1}{3} \\ 2\alpha - 2\beta = \frac{b}{2} \\ 2\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha - \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{12} \\ \beta = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \in \text{Vect}(u, v) \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = 2.$$

Exercice 3.8. (1) On considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (-2, 1, 2)$, $w = (1, -2, 4)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer si la famille $\{u, v, w\}$ est une famille libre ou liée.

(2) Même question dans $\mathbb{R}^4$ avec les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2, -1)$, $u_2 = (1, 3, 4, 2)$, $u_3 = (-1, 2, 1, 0)$ et $u_4 = (-2, 1, 0, 2)$.

$$1. \alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ 5\beta - 4\gamma = 0 \\ 8\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \{u, v, w\} \text{ libre.}$$

(2). Une autre méthode.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Libre! (en escalier)} \Rightarrow \text{base de } \mathbb{R}^4$$

Exercice 3.9. (1) On considère $P_1(X) = 1 - X + X^2$, $P_2(X) = 2 + 2X + 3X^2$ et $P_3(X) = -1 + 2X + 4X^2$. Déterminer si la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre ou liée dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(2) Même question avec $P_1(X) = 1 + X + 2X^2$, $P_2(X) = X + 3X^2 + X^3$, $P_3(X) = X + X^2 + X^3$ et $P_4(X) = 1 - X^2 - 2X^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

(3) Même question dans $\mathbb{R}_2[X]$ avec $P_1(X) = 1 + X + X^2$, $P_2(X) = -2 + 3X + 5X^2$ et $P_3(X) = 8 - 7X - 13X^2$.

$$\alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X) = 0.$$

$$\alpha(1 - X + X^2) + \beta(2 + 2X + 3X^2) + \gamma(-1 + 2X + 4X^2)$$

$$= \alpha - \alpha X + \alpha X^2 + 2\beta + 2\beta X + 3\beta X^2 - \gamma + 2\gamma X + 4\gamma X^2$$

$$= X^2(\alpha + 3\beta + 4\gamma) + X(-\alpha + 2\beta + 2\gamma) + (\alpha + 2\beta - \gamma).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 5\beta + 6\gamma = 0 \\ -\beta - 5\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 5\beta + 6\gamma = 0 \\ 25\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow$ libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

$$(2) \alpha(1 + X + 2X + 2X^2) + \beta(X + 3X^2 + X^3) + \gamma(X + X^2 + X^3) + \delta(1 - X^2 - 2X^2)$$

$$(\alpha + \delta) + X(\alpha + \beta + \gamma) + X^2(2\alpha + 3\beta + \gamma - \delta) + X^3(\beta + \gamma - 2\delta).$$

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma - \delta = 0 \\ \beta + \gamma - 2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \\ 3\beta + \gamma - 3\delta = 0 \\ \beta + \gamma - 2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ \beta + \gamma - \delta = 0 \\ -2\gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \Rightarrow$ famille libre.

