

Ajouter

$\sim 1h$

On veut montrer:

$\text{bienFormé}(t) \Rightarrow \text{bienFormé}(\text{ajouter } a \text{ } t)$ et

$$\llbracket \text{ajouter } a \text{ } t \rrbracket = \{a\} \cup \llbracket t \rrbracket.$$

(H1). $\forall t', \llbracket t' \rrbracket < \llbracket t \rrbracket, \text{bienFormé}(t')$

$\Rightarrow \text{bienFormé}(t)$ et $\llbracket t \rrbracket = \{a\} \cup \llbracket t' \rrbracket$
avec $t = \text{ajouter } a \text{ } t'$.

Cas 1:

$\text{ajouter } k \text{ Vide} = N \ k \text{ Vide Vide}$

- On a: $\llbracket \text{Vide} \rrbracket = \emptyset$

$$\llbracket N \ k \text{ Vide Vide} \rrbracket = \{k\} \cup \emptyset \cup \emptyset$$

Donc, $\llbracket \text{ajouter } k \text{ Vide Vide} \rrbracket = \{k\} \cup \emptyset = \{k\}$ ok.

- $\forall n1 \in \emptyset, n1 < k$ (Vrai)

- $\forall n2 \in \emptyset, n2 > k$ (Vrai).

Donc on a $\text{bienFormé}(\text{ajouter } k \text{ Vide})$, (par déf)
ok.

- Cas 2: $k = p$ (C2).

$$\text{ajouter } k \text{ } (N \ p \ t1 \ t2) = N \ p \ t1 \ t2.$$

On a $[N_p \uparrow 1 \uparrow 2] = \{p\} \cup [1] \cup [2]$.

- Comme $k = p$, on a aussi $= \{k\} \cup [1] \cup [2]$.

On a aussi ajouter $k (N_p \uparrow 1 \uparrow 2) = \{p\} \cup \{k\} \cup [1] \cup [2]$.

Comme $k = p$, blabla bla...

- On a bienformé $(N_p \uparrow 1 \uparrow 2)$.

Comme $N_p \uparrow 1 \uparrow 2 = \text{ajouter } k (N_p \uparrow 1 \uparrow 2)$,

il vient que bienformé (ajouter $k (N_p \uparrow 1 \uparrow 2)$).

- Cas 3. $k < p$ (C3).

ajouter $k (N_p \uparrow 1 \uparrow 2) = N_p (\text{ajouter } k \uparrow 1) \uparrow 2$.

Comme $\text{card}([1]) < \text{card}([2])$, le variant décroît.

Comme on a bienformé $(N_p \uparrow 1 \uparrow 2)$, on a par récursivité bienformé $(\uparrow 1)$.

On peut donc appliquer (H1).

$[\text{ajouter } k \uparrow 1] = \{k\} \cup [\uparrow 1]$ et
bienformé (ajouter $k \uparrow 1$).

On a alors : $[N_p (\text{ajouter } k \uparrow 1) \uparrow 2] = \{p\} \cup \{k\} \cup [1] \cup [2]$
 $= \{k\} \cup [N_p \uparrow 1 \uparrow 2]$ ok. /

Comme on a bienformé (ajouter $k \uparrow 1$) et bienformé $(\uparrow 2)$

et que $k < p$ (C3), il vient que :

$\left. \begin{array}{l} \forall n_1 \in [\text{ajouter } k \uparrow 1], n_1 < p \\ \forall n_2 \in [\uparrow 2], n_2 > p \text{ (par def).} \end{array} \right\} \text{ bien formé.}$

- Cas 4 Réciproque, fin de la preuve.