Travail de révision 5.

Exercice 1:

Q1.1. $i = p$

$\# \; i+1 = p = i = p-1$

en début de boucle.

Le variant est $n-i = n-p$ en fin de boucle et $n-p+1$ en fin.

Donc $n-p+1 > n-p$

et $n > i+i \Rightarrow n-i > 0$ ok, car $i > 0$.

Q1.2

$\# \; Res = somdiv(n,i)$

$i = i+1$

$\# \; Res = somdiv(n,i+1)$

$Res = Res + i + n//i$

$\# \; Res+i+n//i = somdiv(n,i+1) \land n\%i == 0. \Rightarrow Res = somdiv(n,i+1) - i - n//i$
$= somdiv(n,i)$. (par définition de somdiv).

$\# \; n\%i \,!= 0 \land Res = somdiv(n,i)$ ou

$\# \; n\%i == 0 \land Res = somediv(n,i)$

L'invariant est respecté dans les deux cas ok.

Q1.3.

$\# \; Res = somdiv(n,i)$

$Res = 0$

$\# \; 0 = somdiv(n,i)$

$i = 2$

$\# \; 0 = somdiv(n,2) = \Sigma\{k \mid k | n \land (\overbrace{1<k<2}^{\text{Vide}} \lor \overbrace{n//2 < k < n}^{\text{Vide aucun diviseur de n entre n//2 et n.}})\}$, donc vrai.

Q1.4.

On sait que $i*i \geq n$ après la boucle

$Res = somdiv(n,i)$

$Res = Res + i$

$Res + i = somdiv(n,i)$

$Res = somdiv(n,i) \wedge i*i \neq n$ OU (C1)
$Res = somdiv(n,i) - i \wedge i*i == n$. (C2)

(C1) est la somme des diviseurs de 1 à $i = \sqrt{n}$, et n n'est pas un carré parfait.
(C2). Si $i*i == n$, on a que $i == n // i$. On a donc ajouté deux fois le même diviseur à la ligne 5, donc on en retire.

Dans les deux cas, Res contient la somme des diviseurs propres de n, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2.

Q2.1.

$p = x$

$p = p // 10$

$p = 10x$

$S = S + p \% 10$

$p = 10x$

On a $p > 0$ par precondit° de la boucle, donc le variant est positif.
On a $10x > x$, le variant décroit. (car $x > 0$)

Q2.2. # $\exists k . 0 \leq k \leq R+1$, $p = \sum_{i=k}^{R} c_i 10^{i-k}$, $n = p \times 10^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i 10^i$,

$s = \sum_{i=0}^{k-1} c_i$

$p = p // 10$

pareil, mais $p = \sum_{i=k}^{R} c_i 10^{i-k+1}$, $n = p \times 10^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} c_i 10^i$.

$S = S + p \% 10$

pareil, mais $s = \sum_{i=0}^{k-1} c_i - p \% 10$.

Q2.3.

$\exists k.\, 0 \leq k \leq R+1,\ p = \sum_{i=k}^{R} c_i 10^{i-k}\ ,\ n = p \times 10^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i 10^i$

$S = \sum_{i=0}^{k-1} c_i$

$p = n\ ;\ \exists k.\, 0 \leq k \leq R+1,\ n = \sum_{i=k}^{R} c_i 10^{i-k},\ n = n \times 10^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i 10^i.$

$S = \sum_{i=0}^{k-1} c_i$

$S = 0$

donc $k = 0$, $s = 0$, $n = \sum_{i=0}^{R} c_i 10^i$ OK car (Pre).

Q2.4.

On sait que $p \leq 0$, mais $p \geq 0$ car somme d'entiers positifs.

Donc $p = 0$.

$\exists k.\, 0 \leq k \leq R+1,\ p = 0\ (\Rightarrow k = R+1)\ ,\ n = \sum_{i=0}^{R} c_i 10^i$ et $S = \sum_{i=0}^{R} c_i$

$\Rightarrow$ post condit°.