

TD2: ALR.

Retour sur le TD1.

Exo3:

P_n : Pour tout langage L de taille n , $\exists$ une expression rationnelle telle que $L(e) = L$

On va prouver P_n par récurrence.

Cas de base : $|L| = 0$.

Il existe qu'un seul langage $L = \emptyset$

Hérédité:

On suppose P_n vrai pour un n quelconque. Montrons P_{n+1} . ($n \geq 0$)

On prend $|L| = n+1$.

On peut donc écrire $L = L' \cup \{u\}$ où u est un mot quelconque.

On prend $L' = L(e')$ (par hypothèse de récurrence)

Pour avoir L , on concatène L' et $\{u\}$

Donc $L(e' \cup u) = L(e') \cup L(u) = L$.

L'expression $L(e' \cup u)$ dénote donc L .

Exercice 4. Égalités de langages

Soit X un alphabet, on considère trois langages L_1 , L_2 et L_3 sur l'alphabet X .

Pour les questions suivantes, vous devez justifier votre réponse avec une démonstration simple ou un contre exemple.

1. Est-ce que, si $L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot L_3$, alors $L_2 = L_3$?
2. Est-ce que, si $L_1^* = L_2^*$, alors $L_1 = L_2$?
3. Est-ce que $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot L_3 \cup L_2 \cdot L_3$?
4. Est-ce que $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$?

Exercice 1.

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 \cdot L_3 \Rightarrow L_2 = L_3 ?$$

* On prend $L_1 = \emptyset$

$$* L_1 = \{a, a^2\} \quad L_1 \cdot L_2 = \{a, a^2, a^3, a^4\}$$

$$L_2 = \{\epsilon, a, a^2\} \quad L_1 \cdot L_3 = \{a, a^2, a^3, a^4\}.$$

$$L_3 = \{a, a^2\} \quad \text{okay.}$$

$$3. (L_1 \cup L_2) \cdot L_3 \quad \text{On prend } v \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$$

$$\text{On a donc } v = v_1 \cdot v_2, \quad v_1 \in L_1 \cup L_2, \quad v_2 \in L_3$$

$$\text{Donc } v_1 \in L_1 \vee v_1 \in L_2$$

$$\text{Si } v_1 \in L_1, \quad v \in L_1 \cdot L_3 \text{ donc } v \in (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$$

$$\text{Sinon, } v \in L_2 \cdot L_3 \text{ donc } v \in (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$$

$$\text{Donc } (L_1 \cup L_2) \cdot L_3 \subset (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$$

Sens Réciproque. On prend $v \in (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$

Soit $v \in L_1 \cdot L_3$, $\exists (x, y) \in (L_1, L_3)$ tq $v = x \cdot y$

Comme $x \in L_1$, $x \in L_1 \cup L_2 \Rightarrow v \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$

Pareil dans l'autre sens.

Terminé

Fiche de TD2

Exercice 1

On dit que deux expressions rationnelles e_1 et e_2 sont équivalentes, ce qu'on note $e_1 \equiv e_2$, si et seulement si ces expressions dénotent le même langage, c'est-à-dire si $L(e_1) = L(e_2)$.

Par exemple $a \mid b \equiv b \mid a$

Dans les expressions suivantes a et b désignent des lettres.

1. Montrer que:

1. $\epsilon \mid a^* \equiv a^*$

2. $\epsilon \mid a \mid a^* \equiv a^*$

3. $\epsilon \mid a \cdot a^* \equiv a^*$

2. Simplifier l'expression $e_2 = (\epsilon \mid a^* \mid b^* \mid a \mid b)^*$

3. Montrer que $b(ab)^* \equiv (ba)^*b$

$$\begin{aligned} 1.1. \quad \mathcal{L}(\epsilon \mid a^*) &= \mathcal{L}(\epsilon) \mid \mathcal{L}(a^*) = \{\epsilon\} \cup \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \mathcal{L}(a^*) \end{aligned}$$

Donc $\epsilon \mid a^* \equiv a^*$

$$\begin{aligned} 1.2. \quad \mathcal{L}(\epsilon \mid a \mid a^*) &= \mathcal{L}(\epsilon) \mid \mathcal{L}(a) \mid \mathcal{L}(a^*) \\ &= \{\epsilon \mid (a \mid b) \mid a \in \overset{A}{\{a\}}, b \in \overset{B}{\{a^i \mid i \in \mathbb{N}\}}\} \end{aligned}$$

$a \in A \Rightarrow a \in B$ car $A \subset B$ par construction

$$= \{ \varepsilon \mid b \mid b \in \{a^i \mid i \in \mathbb{N}\} \}$$

$$= \mathcal{L}(\varepsilon / a^*) = \mathcal{L}(\varepsilon) \mid (\mathcal{L}(a))^*$$

$$= \{ \varepsilon \} \mid \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i(a)$$

$$= \{ \varepsilon \} \mid \mathcal{L}^0(a) \mid \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i(a)$$

$$= \{ \varepsilon \} \mid \{ \varepsilon \} \mid \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i(a) = \{ \varepsilon \} \mid \bigcup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i(a)$$

$$= (\mathcal{L}(a))^*.$$

$$3. \mathcal{L}(\varepsilon \mid a \cdot a^*) = \mathcal{L}(\varepsilon) \mid \mathcal{L}(a) \cdot (\mathcal{L}(a))^*$$

$$= \{ \varepsilon \} \cup (\mathcal{L}(a))^+$$

$$= (\mathcal{L}(a))^*.$$

$$3. (ba)^*b = b(ab)^*$$