

TD3: ALR

Dans les expressions suivantes a et b désignent des lettres.

1. Montrer que:

1. $\epsilon \mid a^* \equiv a^*$

2. $\epsilon \mid a \mid a^* \equiv a^*$

3. $\epsilon \mid a \cdot a^* \equiv a^*$

2. Simplifier l'expression $e_2 = (\epsilon \mid a^* \mid b^* \mid a \mid b)^*$

3. Montrer que $b(ab)^* \equiv (ba)^*b$

3. Induction sur la longueur des mots.

$$e_3 : b(ab)^* \equiv (ba)^*b : e_4. \quad : L(e_3) = L(e_4)$$

$$\begin{aligned} L(e_3) &= L(b(ab)^*) = L(b) \cdot L(ab)^* = L(b) \cdot \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i(ab) \\ &= \{b\} \cdot \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{ab\}^i \end{aligned}$$

$$\text{HR} : b(ab)^n = (ba)^n b : P_n$$

Cas de base : $n=0$.

$$b \cdot \epsilon = \epsilon \cdot b \quad \text{OK.}$$

Induct° : On suppose P_n vraie à un rang n , montrons P_{n+1} .

$$\begin{aligned} b(ab)^{n+1} &= b(ab)^n \cdot (ab) = (ba)^n b \cdot (ab) \quad (\text{HR}) \\ &= (ba)^n (ba) \cdot b = (ba)^{n+1} b. \end{aligned}$$

Okay.

$$\forall n \in \mathbb{N}, (ba)^n b = b(ab)^n.$$

$$\text{Donc : } L(b) \cdot L^n(ab) = L^n(ba) \cdot L(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc } e_3 \equiv e_4.$$

Partie II: combinatoire des mots

On rappelle la définition de la concaténation:

Définition.

Soit u et v deux mots et $n=|u|$, alors nous avons que:

- $(u \cdot v)[i] = u[i]$ si $i < n$
- $(u \cdot v)[n+i] = v[i]$, si $i < |v|$

Exercice 1.

Dans cet exercice Σ est un alphabet quelconque. Sans pertes de généralité, nous pouvons imaginer que $\Sigma = \{a, b\}$ pour les exemples.

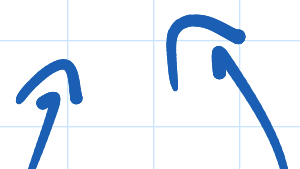
1. Soit u, v et w sur un alphabet Σ . Montrez que si $u \cdot v = u \cdot w$ alors $v = w$.
2. Soit u, v, w et t tel que $u \cdot w = v \cdot t$ avec $|u| = |v|$. Alors $u = v$ et $w = t$.
3. Soit n et p deux entiers non nuls et deux suites de mots de taille p $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ tel que $u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_n$, alors $u_i = v_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

1. On prend $n=|u|$, $m_1 = u \cdot v$ et $m_2 = u \cdot w$
Comme on a $m_1 = m_2$ que u est un préfixe de m_1 et m_2
On a que $|v| = |w| = n$.
 $m_1 = m_2 \Leftrightarrow m_1[i] = m_2[i] \quad \forall i < |m_1|$.
Cela est vrai, pour $i < n$.
Pour $i < n$, il faut que $m_1[n+i] = m_2[n+i]$,
Donc on a $v=w$. ✓

2. $m_1 = u \cdot v$ $m_2 = u \cdot t$

$$m_1 = m_2$$

$$m_1[i] = m_2[i] \quad \forall i.$$

$$m_1 = u \cdot v \text{ et } m_2 = u \cdot w.$$


$$m_1[i] = m_2[i] \quad \forall i < |u|.$$

$$m_1[i] = m_2[i] \quad \forall |u|+1 \leq i \leq |v|$$

3. Soit n et p deux entiers non nuls et deux suites de mots de taille p $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ tel que $u_1 \cdots u_n = v_1 \cdots v_n$, alors $u_i = v_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Réurrence sur n . P_n

Initialisé: $n=1$.

Si $u_1 = v_1$ alors $u_1 = v_1$ (OK).

Hérédité. On suppose P_n vrai à un rang n , montrons P_{n+1} .

$$u_1 \cdots u_n \cdot u_{n+1} = v_1 \cdots v_n \cdot v_{n+1}.$$

Donc on a $u_i = v_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$

d'où q_2 , on a $u_{n+1} = v_{n+1}$

Donc vrai $\forall n$.