

TDG: ALR

Exercice 1. Application du lemme de l'étoile: Langage non reconnaissable

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, montrez que le langage des mots avec autant de a que de b n'est pas reconnaissable.

On a que $a^n b^n \subseteq L$, et $a^n b^n = L \cap (a^* b^*)$

Si L et $(a^* b^*)$ sont reconnaissables, alors $a^n b^n$ l'est.

$a^* b^*$ est reconnaissable par définition mais pas $a^n b^n \Rightarrow L$ pas reconnaissable.

$w_c(u) :=$ nombre d'occurrences de $c \in \Sigma$ dans $u \in L$

$$L = \{u \in \Sigma^* \mid w_a(u) = w_b(u)\}$$

On suppose que L est un langage reconnaissable, alors on peut lui appliquer le lemme de l'étoile :

Alors il existe p, v, s , $|v| \geq 1$ tel que :

- $u = p v s$ $|p s| < w_a(u)$
- $p v^* s \subseteq L$.

$$|u| = 2 w_a(u) \Leftrightarrow |p v s| = 2 w_a(u)$$

$$|p| + |v| + |s| = 2 w_a(u).$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, |p v^i s| = 2n \text{ où } w_a(p v^i s) = w_b(p v^i s)$$

On prend $i = 2$

$$\Rightarrow |p| + 2|v| + |s| = 2 w_a(p v^2 s) \quad |v| = 2 w_a(u) - |p| - |s|$$

$$\Rightarrow |p| + 2|p| + 2|s| + |s| = 2n - 4 w_a(u)$$

$$\Rightarrow (1+2)(|p| + |s|) = 2(n - 2 w_a(u))$$

$$\Rightarrow |p| + |s| = 4 w_a(u) + 2 w_a(p v^2 s)$$

$$0 < 3 w_a(u) + 2 w_a(p v^2 s) \sim .$$

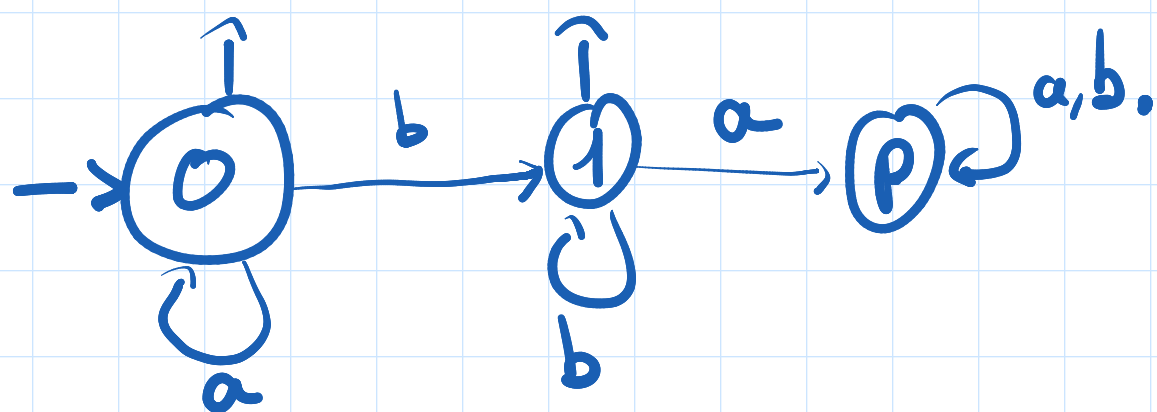
Exercice 2. Minimisation: calcul de résidu

On rappelle que pour un alphabet Σ , un langage L sur l'alphabet Σ et un mot u sur l'alphabet Σ , le résidu de $u^{-1}L$ est le langage

$$u^{-1}L = \{v \mid uv \in L\}$$

1. Calculez tous les résidus du langage a^*b^* . En déduire son automate minimal:
2. Calculez les résidus de $\Sigma^*aa\Sigma^*$ et en déduire son automate minimal

1. $a^{-1}L = L \quad b^{-1}L = b^* \quad (ba)^{-1} = \emptyset$



Règles de calcul :

$$x^{-1}(e_1 | e_2) = x^{-1}e_1 | x^{-1}e_2$$

$$x^{-1}(e_1 \cdot e_2) = \begin{cases} (x^{-1}e_1) \cdot e_2 & \text{si } \varepsilon \notin L(e_1) \\ (x^{-1}e_1) \cdot e_2 | x^{-1}e_2 & \text{si } \varepsilon \in L(e_1) \end{cases}$$

$$x^{-1}e^* = (x^{-1}e)e^*$$

$$x^{-1}\varepsilon = \emptyset, \quad x^{-1}\emptyset = \emptyset, \quad x^{-1}x = \varepsilon, \quad x^{-1}y = \emptyset \text{ si } x \neq y.$$

$$\begin{array}{c} \Sigma^* a a \Sigma^* \\ \swarrow \quad \searrow \\ a \quad \quad b \end{array}$$

$$\Sigma^* a a \Sigma^*$$

$$= a^{-1} \Sigma^* a a \Sigma^*$$

$$= (a^{-1}(a|b))^* \cdot a a \Sigma^*$$

$$= (a^{-1}(a|b)(a|b))^* \cdot a a \Sigma^* | a \Sigma^*$$

$$= \Sigma^* a a \Sigma^* | a \Sigma^*$$

$$= L | a \Sigma^* \quad \angle 1 a \Sigma^* \dots \text{ok.}$$