

TD3: Logique

Exercice 6 : Les chevaliers de la table ronde

Le roi Arthur doit réunir les chevaliers autour de la table ronde. Certains d'entre eux entretiennent une très forte rivalité. Arthur craint que si deux rivaux sont assis côte à côte la réunion ne tourne à l'affrontement. Il souhaite trouver un plan de table qui permette une réunion pacifique.

On suppose que C est l'ensemble des chevaliers et R est l'ensemble des paires de chevaliers en rivalité. La rivalité entre chevalier est symétrique, c'est-à-dire que si un chevalier, Gauvain par exemple, est en rivalité avec un autre, disons Yvain, alors Yvain est aussi en rivalité avec Gauvain.

Nous allons aider Arthur à établir un plan pour la table ronde. Pour cela utilisons une réduction à SAT pour plus tard profiter d'un solveur SAT.

Nous supposons qu'il y a n chevaliers et que les places autour de la table sont numérotées de 1 à n .

Q 6.1 Identifier les variables à utiliser pour modéliser le problème avec SAT.

Q 6.2 Exprimer la contrainte que chaque chevalier doit occuper au moins un siège.

Q 6.3 Exprimer la contrainte qu'un chevalier ne peut occuper au plus qu'un siège.

1. la variable $x_{c,i}$ décrit : "Le chevalier c est assis à la place i " avec $c \in C$ et $i \in \{1 \dots n\}$

2. $\varphi_1: \bigwedge_{c \in C} \bigvee_{i \in \{1 \dots n\}} x_{c,i}$

3. $\varphi_2: \bigwedge_{i \in \{1 \dots n\}} \bigwedge_{(c_1, c_2) \in C^2} \neg x_{c_1, i} \vee \neg x_{c_2, i}$

Q 6.4 Exprimer la contrainte que chaque place est occupée par au moins un chevalier.

Q 6.5 Exprimer la contrainte que deux chevaliers ne peuvent occuper la même place.

Q 6.6 La contrainte précédente est-elle nécessaire ? Pourquoi ?

Q 6.7 Exprimer la contrainte que deux rivaux ne peuvent pas être assis côte à côte. Faites attention au fait que la place numérotée 1 et celle numérotée n sont voisines.

4. $\varphi_4: \bigwedge_{i \in \{1 \dots n\}} \bigvee_{c \in C} x_{c,i}$

5. $\varphi_5: \bigwedge_{(i_1, i_2) \in \{1 \dots n\}^2} \bigwedge_{c \in C} \neg x_{c, i_1} \vee \neg x_{c, i_2}$

6. Non, elle n'est pas utile. Grâce à $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, on sait que la fonction $p: C \rightarrow \{1 \dots n\}$ est bijective.

où p est la fonction qui associe un cavalier à une place.
Donc un antécédent a une seule image, et le cas φ_5 sera toujours vrai.

$$\neg \left(\bigwedge_{i \in \{1 \dots n-1\}} \left(\bigwedge_{(c_1, c_2) \in R} \neg x_{c_1, i} \vee \neg x_{c_2, i+1} \right) \right)$$

$$\wedge \left(\bigwedge_{(c_1, c_2) \in R} \neg x_{c_1, n} \vee \neg x_{c_2, 1} \right)$$

Exercice 7 : Sudoku

Le sudoku est un casse-tête où il faut remplir une grille en respectant des contraintes suivantes :

- Il faut remplir chaque case avec un entier entre 1 et 9,
- Chaque entier doit apparaître exactement une fois par colonne, par ligne et par carré délimité par une ligne plus épaisse (voir la grille d'exemple ci-dessous).

				2			1	7
	3				7			8
				9		6		
	8		9		2		6	
4		6				3		2
	2		6		3		7	
		7		6				
8			7				5	
2	5			3				

Le but de cet exercice est de modéliser les contraintes de résolution d'un Sudoku afin de pouvoir les résoudre avec un solveur SAT.

Les variables utilisées pour modéliser le problème sont $x_{i,j,k}$ avec i, j, k dans $[1, 9]$. La variable $x_{i,j,k}$ est vraie ssi le chiffre de la case i, j est k (on utilise des coordonnées croissantes en i de haut en bas et en j de gauche à droite, la case de coordonnées 1,1 étant celle qui se trouve en haut à gauche). La variable $x_{i,j,k}$ est représentée par `encode(i, j, k)` dans le fichier Python de gitlab.

Q 7.1 Exprimer la contrainte que chaque case contient exactement un chiffre. Entrez le code Python correspondant pour définir les variables `phi1` et `phi2` dans le fichier `sudoku.py`.

Q 7.2 Exprimer les deux contraintes que chaque ligne contient exactement une occurrence de chaque chiffre et que chaque colonne également. Entrez le code Python correspondant pour définir les variables `phi3` et `phi4` dans le fichier `sudoku.py`.

Q 7.3 Exprimer la contrainte qui concerne les carrés. Entrez le code Python correspondant pour définir la variable `phi5` dans le fichier `sudoku.py`. Vous pouvez entrer une définition pour la fonction `carré(i1, i2, j1, j2)` pour vous aider.