

TDS : termes.

Exercice 1 : Ensemble de termes

Q 1.1 Proposer $\mathcal{F}$ et X à partir du sous-ensemble de termes donné.

- $\{\bullet(\triangleleft, \triangleright), \bullet(y_1, \bullet(\triangleright, y_2)), \bullet(y_4, \emptyset), \dots\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}_1, X_1)$ et $\bullet(\triangleleft, \triangleright) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_1)$.
- $\{\alpha(2), \beta(a, \alpha(3)), \beta(\beta(2, 3), \alpha(b)), \alpha(\beta(c, 2)), 3, \dots\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}_2, X_2)$ et $\{3, \alpha(2)\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}_2)$.
- $\{\infty(g), \heartsuit(\diamond(f, w, j), g), \heartsuit(\infty(f), f), \infty(z), \dots\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}_3, X_3)$ et $\{\infty(g), \heartsuit(\infty(f), f)\} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}_3)$.

$$\begin{aligned}
 1. \mathcal{F}_1 &= \{ \bullet, \triangleleft, \triangleright, \emptyset \}, X_1 = \{ y_1, y_2, y_4, \emptyset \} \\
 2. \mathcal{F}_2 &= \{ \alpha, \beta, 2, 3 \}, X_2 = \{ a, b, c \} \\
 3. \mathcal{F}_3 &= \{ \infty, \heartsuit, \diamond, f, g \}, X_3 = \{ w, j, z \}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Expressions arithmétiques

Q 2.1 Considérons les algèbres suivantes avec $\mathcal{F} = \{0[0], s[1], +[2], -[2], \times[2], \div[2]\}$, $\mathcal{F}' = \{0[0], 1[0], 2[0], s[1], +[2], -[2], \times[2], \div[2]\}$ et $X = X' = \{x, y, z\}$.

La première $\mathcal{F}$ -algèbre $\mathcal{M}$ telle que :

- $D_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$,
- $0^{\mathcal{M}} = 0$,
- $s^{\mathcal{M}} = succ$ (fonction qui nous donne l'entier suivant),
- $+^{\mathcal{M}} = +$,
- $-^{\mathcal{M}} = \min$ (fonction qui nous donne le minimum entre deux entiers),
- $\times^{\mathcal{M}} = \cdot$ et
- $\div^{\mathcal{M}} = \max$ (fonction qui nous donne le maximum entre deux entiers).

La deuxième $\mathcal{F}$ -algèbre $\mathcal{M}'$ telle que :

- $D_{\mathcal{M}'} = \mathbb{N}$,
- $0^{\mathcal{M}'} = 0$,
- $1^{\mathcal{M}'} = 1$,
- $2^{\mathcal{M}'} = 2$,
- $s^{\mathcal{M}'} = succ$ (fonction qui nous donne l'entier suivant),
- $+^{\mathcal{M}'} = \min$ (fonction qui nous donne le minimum entre deux entiers),
- $-^{\mathcal{M}'} = +$,
- $\times^{\mathcal{M}'} = \cdot$ et
- $\div^{\mathcal{M}'} = \max$ (fonction qui nous donne le maximum entre deux entiers).

Ci-dessus, dans l'interprétation des symboles de fonction, il est fait référence aux fonctions correspondantes sur les nombres naturels. Traduisez les expressions suivantes selon les $\mathcal{F}$ -algèbres proposées. Pour chaque expression, proposez une traduction dans un terme clos (si possible) et une traduction avec des variables (et donc une affectation possible

- $(2 \cdot x + 3 \cdot y)$
- $\min(2 \cdot 3, \max(4, 2) + 3)$
- $6 \cdot \max(\min(4, (2 + 1)), 2)$

$$\begin{aligned}
 1. \mathcal{M} &: +(\times(s(s(0)), x), \times(s(s(s(0))), y)) \\
 \mathcal{M}' &: -(x(2, x), x(s(2), y))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \mathcal{M} &: -(\times(s(s(0)), s(s(s(0)))), +(\div(s^4(0), s^2(0)), s^3(0))) \\
 &\text{où } s^n(x) = \underbrace{s(s(s \dots (x) \dots))}_{n \text{ fois}}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}' : +(\times(2, s(2)), -(\div(s^2(2), 2) + s(2)))$$

$$\begin{aligned}
 3. \mathcal{M} &: \times(s^6(0), \div(-(s^4(0), +(s^2(0), s(0))), s^2(0))) \\
 \mathcal{M}' &: \times(s^4(2), \div(+ (s^2(2), -(2, 1)), 2))
 \end{aligned}$$

Exercice 3.

Exercice 3 : Substitutions

Q 3.1 Trouvez la substitution appliquée (si elle existe). Si $\mathcal{F} = \{\emptyset[0], \cup[2], \cap[2]\}$ et $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

- 1 — $\cap(x_1, \cup(x_2, \cup(\emptyset, \cup(x_2, x_1))))$ donne $\cap(x_3, \cup(\cup(x_1, x_2), \cup(\emptyset, \cup(\cup(x_1, x_2), x_3))))$;
- 2 — $\cup(\cup(\cap(x_2, \emptyset), x_4), x_3)$ donne $\cup(\cup(\cap(\cap(\emptyset, x_2), \emptyset), \cup(x_1, x_2)), \cup(x_1, x_2))$;
- 3 — $\cup(\cup(x_1, x_2), x_4)$ donne $\cup(\cup(x_2, \cap(x_5, \emptyset)), x_3)$.

1. $x_1 \rightarrow x_3, x_2 \rightarrow \cup(x_1, x_2) \checkmark$
2. $x_2 \rightarrow \cap(\emptyset, x_2), x_4 \rightarrow \cup(x_1, x_2), x_3 \rightarrow \cup(x_1, x_2)$
3. Pas de substitution possible ($x_5 \notin X$).

1. Si $\mathcal{F} = \{\emptyset[0], f[1], g[2], h[2]\}$ et $X = \{x, y, z, w, j, i\}$,

- 1 — $h(f(g(\emptyset, x)), z)\{x/\emptyset, z/f(x)\}$
- 2 — $f(h(x, y))\{x/g(z, y), y/f(\emptyset, \emptyset)\}$
- 3 — $g(f(\emptyset), h(h(g(x, y), \emptyset), x))\{x/f(h(z, f(z)))\}$

1. $h(f(g(\emptyset, \emptyset)), f(x))$.
2. pas possible car $f[i]$.
3. $g(f(\emptyset), h(h(g(f(h(z, f(z))), y), \emptyset), f(h(z, f(z))))$.

2. Si $\mathcal{F} = \{0[0], 100[0], p[1], s[1], +[2]\}$ et $X = \{x, y, z, w, j, i\}$,

- 1 — $+(+(p(x), p(100)), +(p(y), s(z)))\{x/s(100), y/0, w/p(y), z/+(0, z)\}$
- 2 — $+(p(0), +(s(x), s(y)))\{x/100, s(y)/+(0, 100)\}$
- 3 — $p(+ (s(x), 0))\{x/f(p(+ (y, z)))\}$
- 4 — $p(+ (s(x), +(y, p(+ (w, i))))\{y/p(i), w/s(i)\}$

1. $+(+(p(s(100)), p(100)), +(p(0), s(+ (0, z))))$
2. pas une bonne substitution. ($s(y)/+(0, 100)$)
3. pas une bonne substitution ($f \notin \mathcal{F}$)
4. $p(+ (s(x), +(p(i), p(+ (s(i), i))))$.

Exercice 4 : Logique propositionnelle en $\mathcal{F}$ -algèbre

Q 4.1 Proposez une traduction de la logique propositionnelle en une $\mathcal{F}$ -algèbre. Définissez $\mathcal{F}$, X et les éléments de $\mathcal{M}$. Ensuite, traduisez les expressions ci-dessous et montrez si les formules sont satisfiables en évaluant leur traduction en termes dans l'algèbre que vous avez introduite et, bien sûr, en proposant une affectation aux variables.

- 1 — $(a \vee b) \wedge ((\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee (\neg c \vee d)))$,
- 2 — $(a \Leftrightarrow b) \vee c$,
- 3 — $((a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \wedge (d \vee e)$.

$$\mathcal{F} = \{\top[0], \perp[0], \neg[1], \vee[2], \wedge[2], \Rightarrow[2], \Leftrightarrow[2]\}$$

$$X = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\mathcal{D}_M = \{\text{vrai}, \text{faux}\}$$

$$\top^M \rightarrow \text{vrai} \quad \vee^M \rightarrow \text{ou logique}$$

$$\perp^M \rightarrow \text{faux} \quad \wedge^M \rightarrow \text{et logique} \quad \Leftrightarrow^M \text{équivalence.}$$

$$\neg^M \rightarrow \text{négation} \quad \Rightarrow^M \rightarrow \text{implication}$$

$$1. \wedge (v(a, b), \wedge (v(\neg(b), c), v(\neg(a), v(\neg(c), d))))$$

$$\lambda(a) = \text{vrai}, \lambda(b) = \text{faux}, \lambda(c) = \text{faux}, \lambda(d) = \text{vrai}$$

$$\wedge (v(\text{vrai}, \text{faux}), \wedge (v(\text{vrai}, \text{faux}), v(\text{faux}, v(\text{vrai}, \text{vrai}))))$$

$$\equiv \wedge (\text{vrai}, \wedge (\text{vrai}, v(\text{faux}, \text{vrai}))) = v(\text{vrai}, \wedge (\text{vrai}, \text{vrai})) = \text{vrai}.$$

$$2. v(\Leftrightarrow(a, b), c).$$

$$\lambda(a) = \lambda(b) = \text{faux}, \lambda(c) = \text{faux}$$

$$v(\Leftrightarrow(\text{faux}, \text{faux}), \text{faux}) = v(\text{vrai}, \text{faux}) = \text{vrai}.$$

$$3. \wedge (\Rightarrow(\Rightarrow(a, b), c), v(d, e))$$

$$\lambda(b) = \lambda(c) = \lambda(e) = \text{faux}, \lambda(a) = \lambda(d) = \text{vrai}.$$

$$\wedge (\Rightarrow(\Rightarrow(\text{vrai}, \text{faux}), \text{faux}), v(\text{vrai}, \text{faux}))$$

$$\wedge (\Rightarrow(\text{faux}, \text{faux}), \text{vrai}) = \wedge(\text{vrai}, \text{vrai}) = \text{vrai}.$$

Exercice 5 : Sémantique

Q 5.1 Considérons la $\mathcal{F}$ -algèbre inspirée des multi-ensembles constitués de zéros et de uns, avec $\mathcal{F} = \{\text{emp}[0], 0[0], 1[0], \text{opp}[1], \text{most}[1], \text{add}[2]\}$ et $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Nous avons $\mathcal{M}$ défini comme suit :

- $D_{\mathcal{M}}$ contient les multi-ensembles composés de zéros et de uns,
- $\text{emp}^{\mathcal{M}} = \emptyset$,
- $1^{\mathcal{M}} = \{1\}$,
- $0^{\mathcal{M}} = \{0\}$,
- $\text{opp}^{\mathcal{M}}$ transforme un multi-ensemble contenant n fois 0 et m fois 1, en un multi-ensemble contenant n fois 1 et m fois 0 (ex : $\{0, 1, 0\}$ devient $\{1, 0, 1\}$),
- $\text{add}^{\mathcal{M}}$ additionne deux multi-ensembles (en additionnant le nombre d'occurrences des éléments),
- $\text{most}^{\mathcal{M}}$ retient les éléments ayant le plus grand nombre d'occurrences et supprime les autres (ex : $\{0, 1, 0\}$ devient $\{0, 0\}$ et $\{0, 1, 0, 1\}$ devient $\{0, 1, 0, 1\}$).

1. Proposer au moins deux éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ et deux de $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ en indiquant le multi-ensemble correspondante (si possible).

2. Calculer la valeur des termes suivants :

- 1 — $\text{add}(1, (\text{add}(x_1, x_2)))$ avec $[x_1 \rightarrow \{0\}, x_2 \rightarrow \{1\}]$,
- 2 — $\text{add}(\text{opp}(x_3), \text{add}(\text{opp}(0), x_1))$ avec $[x_1 \rightarrow \{0\}, x_3 \rightarrow \{0\}]$,
- 3 — $\text{add}(x_1, \text{opp}(\text{most}(\text{add}(x_2, x_3))))$ avec $[x_1 \rightarrow \{0, 1, 0\}, x_2 \rightarrow \{0, 1\}, x_3 \rightarrow \{1, 0\}]$,
- 4 — $\text{opp}(\text{add}(x_2, \text{most}(\text{add}(0, \text{add}(x_3, \text{amp}))))$ avec $[x_2 \rightarrow \{1, 1\}, x_3 \rightarrow \{0, 1, 0, 1\}]$,
- 5 — $\text{most}(\text{add}(\text{opp}(x_2), \text{add}(\text{opp}(x_3), \text{opp}(x_4))))$ avec $[x_2 \rightarrow \{1, 1\}, x_3 \rightarrow \{0, 1, 0, 1\}]$.

$$1. \emptyset, \text{add}(1, \text{add}(1, 0)) = \{1, 1, 0\} \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$$

$$\text{add}(\text{opp}(x_1), \text{most}(x_2)), \text{add}(x_3, \text{emp}) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, X).$$

2.

$$1. \text{add}(1, \text{add}(\{0\}, \{1\})) = \text{add}(1, \{0, 1\}) = \{1, 0, 1\}$$

$$2. \text{add}(\text{opp}(\{0\}), \text{add}(\text{opp}(0), \{0\}))$$

$$= \text{add}(\{1\}, \text{add}(\{1\}, \{0\}))$$

$$= \text{add}(\{1\}, \{1, 0\}) = \{1, 1, 0\}.$$

$$3. \text{add}(\{0, 1, 0\}, \text{opp}(\text{most}(\text{add}(\{0, 1\}, \{1, 0\}))))$$

$$= \text{add}(\{0, 1, 0\}, \text{opp}(\text{most}(\{0, 1, 1, 0\})))$$

$$= \text{add}(\{0, 1, 0\}, \text{opp}(\{0, 1, 1, 0\}))$$

$$= \text{add}(\{0, 1, 0\}, \{1, 0, 0, 1\}) = \{0, 1, 0, 1, 0, 0, 1\}$$

$$4. \text{opp}(\text{add}(\{1, 1\}, \text{most}(\text{add}(0, \text{add}(\{0, 1, 0, 1\}, \text{emp}))))))$$

$$= \text{opp}(\text{add}(\{1, 1\}, \text{most}(\text{add}(\{0\}, \{0, 1, 0, 1\}))))$$

$$= \text{opp}(\text{add}(\{1, 1\}, \text{most}(\{0, 0, 1, 0, 1\})))$$

$$= \text{opp}(\text{add}(\{1, 1\}, \{0, 0, 0\}))$$

$$= \text{opp}(\{1, 1, 0, 0, 0\}) = \{1, 1, 0, 0, 0\}$$

5. Non calculable, il manque $\lambda(x_w)$.

Q 5.2 Interprétez les termes ci-dessus dans les deux $\mathcal{F}$ -algèbres proposées. Avec

$$\mathcal{F} = \{a[0], b[0], \emptyset[0], \text{add}[2], \text{rem}[1], \text{dup}[1]\} \text{ et } X = \{x, y, z, w\},$$

nous pouvons définir $D_{\mathcal{M}} = (a|b)^*$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $\emptyset^{\mathcal{M}} = \varepsilon$, $\text{add}^{\mathcal{M}}$ qui concatène les deux chaînes de caractères, $\text{rem}^{\mathcal{M}}$ qui élimine la dernière lettre et $\text{dup}^{\mathcal{M}}$ qui concatène une chaîne à elle-même. Nous pouvons ensuite définir une deuxième algèbre, $D_{\mathcal{M}'} = \mathbb{N}$, $a^{\mathcal{M}'} = 2$, $b^{\mathcal{M}'} = 3$, $\emptyset^{\mathcal{M}'} = 0$, $\text{add}^{\mathcal{M}'} = +$, $\text{rem}^{\mathcal{M}'}$ qui soustrait un à l'entier (mais renvoie 0 s'il s'agit de soustraire à 0), et $\text{dup}^{\mathcal{M}'}$ qui multiplie le nombre par lui-même. Interprétez les termes :

1 — $\text{dup}(\text{add}(x, y))$ avec $[x \rightarrow a, y \rightarrow b]$ et $[x \rightarrow 2, y \rightarrow 3]$

2 — $\text{add}(\emptyset, \text{add}(\emptyset, a))$

3 — $\text{rem}(\text{dup}(\text{add}(x, y)))$ avec $[x \rightarrow ab, y \rightarrow ba]$ et $[x \rightarrow 5, y \rightarrow 5]$

4 — $\text{add}(x, \text{add}(x, \text{add}(y, \text{add}(w, \text{rem}(\text{add}(z, z))))))$ avec $[x \rightarrow abb, y \rightarrow aa, w \rightarrow bb, z \rightarrow ba]$ et $[x \rightarrow 8, y \rightarrow 4, w \rightarrow 6, z \rightarrow 5]$

5 — $\text{add}(\text{add}(y, \text{rem}(y)), \text{rem}(\text{dup}(\text{add}(\text{dup}(a), \text{dup}(b)))))$ avec $[x \rightarrow a, y \rightarrow ab]$ et $[x \rightarrow 2, y \rightarrow 5]$

1. $\mathcal{M} : \text{dup}(a.b) = (a.b)^2 = abab$

$\mathcal{M}' : \text{dup}(\text{add}(a, b)) = 2(2+3) = 12.$

2. $\mathcal{M} : \text{add}(\emptyset, \text{add}(\emptyset, a)) = \varepsilon.(\varepsilon.a) = a$

$\mathcal{M}' : 0 + (0+2) = 2.$

$$3. \mathcal{M}: \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(a, b)), \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(a, b)), \text{Rem}(\text{add}(\text{dup}(a), \text{dup}(b)))) = \text{add}(\text{add}(a, b), \text{add}(a, b))$$

$$\mathcal{M}': \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(5, 5)), \text{Rem}(\text{dup}(10), \text{Rem}(20))) = 19.$$

$$\begin{aligned} 4. & \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{aa}, \text{add}(\text{bb}, \text{Rem}(\text{add}(\text{ba}, \text{ba})))))) \\ &= \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{aa}, \text{add}(\text{bb}, \text{Rem}(\text{baba})))) \\ &= \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{aa}, \text{add}(\text{bb}, \text{bab})))) \\ &= \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{aa}, \text{bbbab}))) \\ &= \text{add}(\text{abb}, \text{add}(\text{abb}, \text{aabbbab})) \\ &= \text{add}(\text{abb}, \text{abb aabb bab}) = \text{abbabb aabb bab}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}': & \text{add}(8, \text{add}(8, \text{add}(4, \text{add}(6, \text{Rem}(\text{add}(5, 5)))))) \\ &= \text{add}(8, \text{add}(8, \text{add}(4, \text{add}(6, \text{Rem}(10))))) \\ &= \text{add}(8, \text{add}(8, \text{add}(4, \text{add}(6, 9)))) \\ &= \text{add}(8, \text{add}(8, \text{add}(4, 15))) \\ &= \text{add}(8, \text{add}(8, 19)) \\ &= \text{add}(8, 27) = 35. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \mathcal{M}: & \text{add}(\text{add}(\text{ab}, \text{Rem}(\text{ab})), \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(\text{dup}(a), \text{dup}(ab)))))) \\ &= \text{add}(\text{add}(\text{ab}, \text{Rem}(\text{ab})), \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(\emptyset, a)))) \\ & \quad \text{add}(\text{add}(\text{ab}, \text{Rem}(\text{ab})), \text{Rem}(\text{dup}(a))) \\ & \quad \text{add}(\text{add}(\text{ab}, \text{Rem}(\text{ab})), \text{Rem}(aa)) \\ & \quad \text{add}(\text{add}(\text{ab}, a), a) = \text{add}(\text{aba}, a) = \text{abaa}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}': & \text{add}(\text{add}(5, \text{Rem}(5)), \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(\text{dup}(2), \text{dup}(5))))) \\ & \quad \text{add}(\text{add}(5, \text{Rem}(5)), \text{Rem}(\text{dup}(\text{add}(4, 10)))) \\ & \quad \text{add}(\text{add}(5, 4), \text{Rem}(\text{dup}(14))) \\ & \quad \text{add}(9, \text{Rem}(28)) = \text{add}(9, 27) = 36. \end{aligned}$$

Exercice 6 : Unification

Q 6.1 Les termes suivants sont-ils unifiables ? Si oui, calculez l'unificateur primaire et justifiez votre réponse. Prenez la bonne habitude (surtout pour l'examen) d'indiquer à chaque étape les règles que vous appliquez. On a $X = \{x, y, u, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$. Imaginez que les différents exercices puissent être basés sur des signatures différentes mais contenant toujours $\mathcal{F}_0$.

1. $\{h(g(x), f(a, y), z) \stackrel{?}{=} h(y, z, f(u, x))\}$
2. $\{h(g(x), f(a, y), z) \stackrel{?}{=} h(y, z, f(u, g(x)))\}$
3. $\{r(a, f(x)) \stackrel{?}{=} r(y, f(g(y, b)))\}$
4. $\{r(y, f(x)) \stackrel{?}{=} r(x, f(g(y, b)))\}$
5. $\{q(y, f(x), g(y, x)) \stackrel{?}{=} q(x, f(y), g(f(a), y))\}$

$$\begin{aligned}
 1. & \{h(g(x), f(a, y), z) \stackrel{?}{=} h(y, z, f(u, x))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{g(x)=y, f(a, y)=z, z=f(u, x)\} \\
 & \xrightarrow{ech} \{y=g(x), z=f(a, y), z=f(u, x)\} \\
 & \xrightarrow{elim} \{y=g(x), f(a, y)=f(u, x)\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{y=g(x), a=u, y=x\} \text{ Pas possible : c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \{h(g(x), f(a, y), z) \stackrel{?}{=} h(y, z, f(u, g(x)))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{g(x)=y, f(a, y)=z, z=f(u, g(x))\} \\
 & \xrightarrow{ech} \{y=g(x), z=f(a, y), z=f(u, g(x))\} \\
 & \xrightarrow{elim} \{y=g(x), z=f(a, g(x)), z=f(u, g(x))\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. & \{r(a, f(x)) \stackrel{?}{=} r(y, f(g(y, b)))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{a=y, f(x)=f(g(y, b))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{a=y, x=g(y, b)\} \\
 & \xrightarrow{ech} \{y=a, x=g(y, b)\} \\
 & \xrightarrow{elim} \{y=a, x=g(a, b)\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. & \{r(y, f(x)) \stackrel{?}{=} r(x, f(g(y, b)))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{y=x, f(x)=f(g(y, b))\} \\
 & \xrightarrow{dec} \{y=x, x=g(y, b)\} \\
 & \xrightarrow{ech} \{x=y, x=g(y, b)\} \\
 & \xrightarrow{elim} \{x=g(x, b)\} \text{ CONFLIT.}
 \end{aligned}$$

$$5. \{ q(y, f(x), g(y, x)) = q(x, f(y), g(f(a), y)) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ y = x, f(x) = f(y), g(y, x) = g(f(a), y) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ y = x, x = y, y = f(a), x = y \}$$

$$\xrightarrow{elim} \{ x = y, y = f(a) \} \text{ ok.}$$

$$6. \{ x(a, +(z, b)) = x(x, y) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ a = x, +(z, b) = y \}$$

$$\xrightarrow{ech} \{ x = a, y = +(z, b) \}$$

$$7. \{ x(+(x, b), +(y, b)) = x(+(a, b), z) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ +(x, b) = +(a, b), +(y, b) = z \}$$

$$\xrightarrow{ech} \{ +(x, b) = +(a, b), z = +(y, b) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ x = a, b = b, z = +(y, b) \}$$

$$\xrightarrow{elim} \{ x = a, z = +(y, b) \} \text{ ok.}$$

$$8. \{ +(x(z, a), x) = +(x(y, +(x, b)), b), +(x(a, z), x) = +(x(y, +(x, b)), b) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ x(z, a) = x(y, +(x, b)), x = b, x(a, z) = x(y, +(x, b)), x = b \}$$

$$\xrightarrow{supp} \{ x(z, a) = x(y, +(x, b)), x = b, x(a, z) = x(y, +(x, b)) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ z = y, a = +(x, b), x = b, a = y, z = +(x, b) \}$$

$$\xrightarrow{elim} \{ z = y, a = +(b, b), x = b, a = y, z = +(b, b) \} \text{ ok.}$$

$$9. \{ f(x, y, g(a, a)) = f(g(y, y), z, z), f(x, y, a) = f(y, g(z, z), x) \}$$

$$\xrightarrow{dec} \{ x = g(y, y), y = z, g(a, a) = z, x = y, y = g(z, z), a = x \}$$

$$\xrightarrow{ech} \{ x = g(y, y), y = z, z = g(a, a), x = y, y = g(z, z), x = a \}$$

$$\xrightarrow{elim} \{ x = g(a, a), y = a, z = g(a, a), y = g(a, a), x = a \}$$

$$\xrightarrow{elim} \{ a = g(a, a) \} \text{ Conflict } \therefore c$$