

TD6: Logique

Exercice 1 :

Dans les syllogismes aristotéliens, interviennent souvent des propriétés P , Q des individus et des assertions ayant les formes suivantes :

Q 1.1 Tous les P sont des Q .

Q 1.2 Certains P sont des Q .

Q 1.3 Aucun P n'est un Q .

Q 1.4 Certains P ne sont pas des Q .

Traduire ces assertions par des formules du calcul des prédicats, en introduisant les prédicats $P(x)$ et $Q(x)$.

$$1. \forall x. P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$2. \exists x. P(x) \wedge Q(x)$$

$$3. \forall x. P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$$

$$4. \exists x. P(x) \wedge \neg Q(x).$$

Exercice 2 :

Soit D , un ensemble de danseurs. On note $d(a, b)$ le fait que les danseurs a et b dansent ensemble. Donner une formule de la logique des prédicats exprimant qu'aucun danseur ne danse avec lui-même et qu'aucun danseur ne danse avec deux danseurs à la fois, en n'utilisant que le prédicat d et le prédicat d'égalité eq sur D .

$$\varphi_1 \forall a. \forall b. eq(a, b) \Rightarrow \neg d(a, b)$$

$$\varphi_2 \forall a. \forall b. \forall c. (\neg eq(a, b) \wedge \neg eq(b, c) \wedge \neg eq(a, c)) \Rightarrow (d(a, b) \wedge \neg d(a, c)).$$

$$\varphi: \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$

Exercice 3 :

Dans cet exercice, nous allons modéliser un ensemble de données cinématographiques à l'aide de la logique du premier ordre.

Nous nous dotons des prédicats suivants :

— prédicats uniaires :

- **film** : prédicat qui caractérise les films,
- **artiste** : prédicat qui caractérise les artistes,
- **acteur** : prédicat qui caractérise les acteurs,
- **realisateur** : prédicat qui caractérise les réalisateurs.

— prédicats binaires :

- **joue** : prédicat qui indique qu'un *acteur* joue dans un *film* ; $joue(x, y)$ est vrai lorsque x joue dans y ,
- **realise** : prédicat qui indique qu'un *realisateur* réalise un *film* ; $realise(x, y)$ est vrai lorsque x réalise y .
- **eq** : prédicat qui indique si deux individus sont identiques. Vous pourrez écrire $x = y$ au lieu de $eq(x, y)$.

Q 3.1 Écrire une formule qui signifie que tout artiste est soit un acteur, soit un réalisateur et inversement.

$$\forall a. artiste(a) \Leftrightarrow (acteur(a) \vee realisateur(a))$$

Q 3.2 Écrire une formule qui signifie que tout acteur joue dans au moins un film.

$$\forall a. \exists f. \text{acteur}(a) \wedge \text{film}(f) \Rightarrow \text{joue}(a, f)$$

Q 3.3 Écrire une formule similaire pour les réalisateurs.

$$\forall a. \exists f. \text{realisateur}(a) \wedge \text{film}(f) \Rightarrow \text{realise}(a, f)$$

Q 3.4 Écrire une formule $\text{artistePolyvalent}(x)$ (qui contient une variable libre x) qui est vraie si et seulement si, x joue dans un film tout en le réalisant.

$$\exists f. \text{film}(f) \wedge \text{joue}(x, f) \wedge \text{realise}(x, f).$$

Q 3.5 Écrire une formule $\text{unFilm}(x)$ (qui contient une variable libre x) qui est vraie si et seulement si, x a réalisé exactement un film.

$$\exists f_1. \text{film}(f_1) \wedge \text{realise}(x, f_1) \wedge (\forall f_2. \neg \text{eq}(f_1, f_2) \Rightarrow \neg \text{realise}(x, f_2))$$

Q 3.6 Écrire une formule qui signifie qu'aucun acteur n'a joué dans tous les films.

$$\forall a. \exists f. \text{acteur}(a) \wedge \text{film}(f) \Rightarrow \neg \text{joue}(a, f).$$

Q 3.7 Écrire un prédicat $\text{acteurFavori}(x, y)$ (qui contient deux variables libres x et y) qui est vrai si et seulement si x est un acteur, y est un réalisateur, x joue dans tous les films réalisés par y et ne joue dans aucun autre film.

$$\text{acteur}(x) \wedge \text{realisateur}(y) \wedge \forall f. ((\text{realise}(y, f) \Rightarrow \text{joue}(x, f)) \wedge (\neg \text{realise}(y, f) \Rightarrow \neg \text{joue}(x, f))).$$

Q 3.8 Écrire une formule qui signifie qu'un film a toujours au moins deux acteurs.

$$\forall f. \exists a_1. \exists a_2. \text{film}(f) \wedge \text{acteur}(a_1) \wedge \text{acteur}(a_2) \wedge \neg \text{eq}(a_1, a_2) \Rightarrow (\text{joue}(a_1, f) \wedge \text{joue}(a_2, f)).$$

Q 3.9 Écrire une formule qui signifie que pour toute paire d'acteurs, ceux-ci ont joué pour un même réalisateur (pas forcément dans le même film).

$$\forall a_1. \forall a_2. \text{acteur}(a_1) \wedge \text{acteur}(a_2) \Rightarrow \exists r. \exists f_1. \exists f_2. (\text{realisateur}(r) \wedge \text{film}(f_1) \wedge \text{film}(f_2) \wedge \text{realise}(r, f_1) \wedge \text{realise}(r, f_2) \wedge \text{joue}(a_1, f_1) \wedge \text{joue}(a_2, f_2)).$$

Exercice 4 :

Dans cet exercice, nous allons utiliser un langage logique sur des chaînes de caractères constituées uniquement des lettres a et b . Intuitivement les objets que nous manipulons sont des positions dans les chaînes de caractères.

Nous allons utiliser les opérateurs suivants pour constituer les termes de notre langage :

- les constantes : d et f qui représentent respectivement le début et la fin de la chaîne de caractères.
- l'opérateur unaire : s qui associe à chaque position dans la chaîne de caractères la position suivante (il faudra faire attention lorsque cet opérateur peut être appliqué à la dernière position).

Nous allons utiliser les prédicats suivants :

- prédicats unaires :
 - a : indique que la position considérée porte la lettre a
 - b : indique que la position considérée porte la lettre b
- prédicat binaire :
 - $avant$: indique qu'une position précède (strictement) une autre ; $avant(x, y)$ est vrai lorsque x est une position qui précède y .
 - eq : prédicat qui indique si deux individus sont identiques. Vous pourrez écrire $x = y$ au lieu de $eq(x, y)$.

Q 4.1 Écrire une formule logique qui signifie qu'il n'y a aucune position qui précède la première position.

$$\neg (\exists p. eq(s(p), d))$$

Q 4.2 Écrire une formule logique qui signifie qu'il n'y a aucune position qui suit la dernière position.

$$\neg (\exists p. eq(p, s(f))).$$

Q 4.3 Écrire une formule logique qui signifie que chaque position porte exactement une et une seule lettre (soit un a , soit un b).

$$\forall p. (a(p) \wedge \neg b(p)) \vee (\neg a(p) \wedge b(p))$$

Q 4.4 Écrire une formule logique qui signifie que toutes les positions contenant un a précèdent celles contenant un b (NB : cela n'interdit pas que le mot ne contienne qu'une seule lettre).

$$\forall p_1. \forall p_2. (avant(p_1, p_2) \wedge a(p_1) \Rightarrow b(p_2))$$

Q 4.5 Écrire une formule logique qui signifie que le mot contient (strictement) plus de deux positions.

$$\exists p_1. \exists p_2. \exists p_3. avant(p_3, p_2) \wedge avant(p_2, p_1)$$

Q 4.6 Écrire une formule qui signifie que le mot contient le sous-mot « aba »

$$\exists p_1. \exists p_2. \exists p_3. eq(s(p_1), p_2) \wedge eq(s(p_2), p_3) \wedge a(p_1) \wedge b(p_2) \wedge a(p_3)$$

Q 4.7 Écrire une formule logique qui signifie que le mot est dans le langage $(ab)^*$ (c.f. le cours d'ALR).

$$eq(d, f) \vee (\forall x. a(d) \wedge b(f) \wedge a(x) \Rightarrow b(s(x)) \wedge b(x) \Rightarrow a(s(x)))$$

Q 4.8 Écrire un prédicat $marques(x, y)$ (qui contient deux variables libres x et y) et qui est vrai ssi le mot commençant à la position x et finissant à la position y est de la forme $aubb$ où u est un mot ne contenant que des a .

$$a(x) \wedge b(y) \wedge (\exists p_1. eq(s(p_1), y) \wedge b(p_1) \wedge \forall p_2. \neg eq(p_2, x) \wedge \neg eq(p_2, y) \wedge \neg eq(p_2, p_1) \wedge a(p_2))$$