

TD1: CDC

1 Canal de communication

Exercice 1.1 : Canal vraiment très bruité ?

Supposons qu'un CBSSM soit vraiment très bruité, c'est-à-dire un canal dans lequel la probabilité p d'erreur lors de la transmission d'un bit soit strictement supérieure à $1/2$.

Q 1.1 Que dire de ce canal si $p = 1$? Est-il vraiment si bruité ?

Le canal est inversé

Non, suffit de faire un not

Q 1.2 Que faire si $1/2 < p < 1$?

On prend $p = 1 - p$, et on a une valeur $p < 0.5$

Exercice 2.1 : Numéro INSEE

Le numéro INSEE est un numéro composé de 13 chiffres auquel on ajoute une clé de deux chiffres pour contrôler d'éventuelles erreurs de saisie.

On obtient cette clé

1. en réduisant le numéro N modulo 97 : $r = N \pmod{97}$;
2. en retranchant r à 97 : la clé est $k = 97 - r$.

Par exemple, pour le numéro INSEE $N = 2\ 90\ 02\ 59\ 350\ 112$ on a

1. $r = N \pmod{97} = 96$;
2. $k = 97 - 96 = 01$.

La clé est un entier compris 1 et 97. On l'écrit en base 10 sur deux chiffres.

Q 1.1 Comment contrôler la validité d'un couple numéro/clé (N, k) ?

Q 1.2 Vérifier que l'ajout de cette clé au numéro INSEE permet de détecter toutes les erreurs simples (modification d'un chiffre).

Q 1.1 $(N + k) \pmod{97}$.

Q 1.2 . $N = \sum_{i \leq 12} a_i 10^i$ tel que $\begin{cases} a_i = a'_i & \text{si } i \neq k \\ a_i \neq a'_i & \text{si } i = k \end{cases}$

$N' = \sum_{i \leq 12} a'_i 10^i$ pour $0 \leq k \leq 12$

$$|N' - N| = |(a'_k - a_k) 10^k|$$

$$|a'_k - a_k| \in \llbracket 1, 9 \rrbracket ; 10^k = 2^k 5^k$$

$$= p^k, p \in \{2, 5\}$$

0_k , 97 est premier, donc 97 ne divise ni p^k , ni 10^k

Q 1.3 Vérifier que l'ajout de la clé permet de détecter les permutations de deux chiffres consécutifs.

$$N = \sum_{i \leq 12} a_i 10^i \quad + q \quad \begin{cases} a_i = a'_i & \text{si } i \neq k \vee i \neq k+1 \\ a_{i+1} = a'_i \wedge a'_{i+1} = a_i & \text{non} \end{cases}$$

$$N' = \sum_{i \leq 12} a'_i 10^i$$

$$N' - N = (a_{k+1} - a_k) 10^{k+1} + (a_k - a_{k+1}) 10^k$$

$$= (10(a_{k+1} - a_k) - (a_{k+1} - a_k)) 10^k$$

$$= (10a_{k+1} - 10a_k - a_{k+1} + a_k) 10^k$$

$$= 9(a_{k+1} - a_k) 10^k$$

Q 1.4 Permet-il de détecter davantage d'erreurs ?

Oui, mais pas les erreurs multiples de 97.

Q 2.1 Calculez la capacité de détection et de correction des codes binaires suivants :

1. $C = \{11100, 01001, 10010, 00111\}$
2. $C = \{11111111, 11001100, 10101010, 00000000\}$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right\} \right. \\ 3 \end{array} \right\} 4 \Rightarrow d_{H \min} = 3$$

$$\left\lfloor \frac{d_{H \min} - 1}{2} \right\rfloor - \text{correcteur.}$$

2 - détecteur
1 - correcteur

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right\} \right. \\ 4 \end{array} \right\} 8 \quad d_{H \min} = 4$$

3 - détecteur
1 - correcteur

Q 2.2 Soit d la capacité de détection d'erreurs d'un codage. Déduisez-en sa capacité de correction.

$$d = d_{H \min} - 1 = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - \text{correcteur.}$$

Exercice 2.3 : Codage de parité à deux dimensions

Voici une amélioration du codage de parité : on découpe le message de k bits à transmettre en k_1 blocs de k_2 bits, et on code séparément chacun de ces blocs. Pour cela

1. on dispose le bloc à coder en k_1 lignes de longueur k_2 ,
2. on ajoute un bit de parité à la fin de chacune de ces lignes,
3. on ajoute une $k_1 + 1$ -ème ligne en faisant le codage de parité des $k_2 + 1$ colonnes formées par les k_1 lignes qui précèdent,
4. puis on forme le mot de longueur $n = (k_1 + 1)(k_2 + 1)$ obtenu en concaténant ces $k_1 + 1$ lignes.

Par exemple, avec $k_1 = 5$ et $k_2 = 4$, pour transmettre le $\mathbf{u} = \overbrace{0010 \ 1110 \ 0101 \ 0001 \ 0110}^{k_2}$, on construit les lignes :

Q 3.1 Étudiez les propriétés de détection et correction d'erreurs de ce codage.

		k_2	
		$\longleftrightarrow$	
		0010	1
		0110	1
		0101	0
		0001	1
		0110	0
		1110	1
	k_1	$\updownarrow$	

et on transmet le mot $\mathbf{c}(\mathbf{u}) = 0010 \ 1110 \ 0101 \ 0001 \ 0110 \ 1101011101$ (bien entendu les espaces sont juste une aide visuelle mais ne sont pas transmises).

Q 3.1 Étudiez les propriétés de détection et correction d'erreurs de ce codage.

Q 3.2 Ce codage par parité à deux dimensions est un $[n, k, d]$ -codage linéaire. Donner les valeurs de n , k et d lorsque $k_1 = 2$ et $k_2 = 2$, puis de manière générale en fonction de k_1 et k_2 .

Il est 1-détecteur

3-détecteur (parité totale non respectée)

4-détecteur : non (rectangle) *

Distance minimale : 4.

Il est 1-correcteur.