TD3 : CDC.

Exercice 2.7 : ***Codage de Hamming***

Le mot $\mathbf{v}' = 1100110$ a été reçu, en sachant que le mot émis a été codé avec le codage de Hamming $[7,4,3]$ (dont la matrice génératrice et une matrice de contrôle sont redonnées ci-dessous).

$$G = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad H = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Q 7.1 En faisant l'hypothèse qu'au plus un bit est erroné, quel est le mot qui a été émis ? Quel est le message qui voulait être envoyé ?

Q 7.2 Combien y a-t-il eu d'erreurs lors de la transmission si le message initial était $u = 1100$? Pourquoi la correction n'a pas permis de retrouver le message d'origine ?

Aucune colonne de H est nulle : au moins 1 détecteur

$u = (1100)$

$$u.G = (1100)\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ttes colonnes ≠, 2 détecteur

Il existe une combinaison linéaire de 3 colonnes qui est nulle : ∅ 3 détecteur.

1100101

$$(1100110) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (011)$$

NUL : nombre "réduit" d'erreurs -> potentiellement exact

Non nul : erroné. Corrigeable ?

↳ On recherche la colonne dans H égale au syndrome (si elle existe)

$e = 0100000$

$$s(v') = s(v \oplus e) = \underbrace{s(v)}_{=0.} \oplus s(e)$$

Message -> 1000

On a eu $1100101 \oplus 1100110 = 0000011$ -> 2 erreurs.

Le code est 1 correcteur :c

1 Sources, quantité d'information et entropie

Exercice 1.1 : ***Pour s'échauffer***

Q 1.1 Que dire de la longueur moyenne d'un codage optimal dans le cas où tous les symboles de la source sont équiprobables ?

$|S| = m$, $p_i = \frac{1}{m}$, alors $\bar{n}_c = \frac{\sum_{i=1}^{m} |c(s_i)|}{m}$ => moyenne arithmétique des longueurs des mots du code.

Somme de Kraft.

$$K(L) = \sum_{u \in L} \frac{1}{2^{|u|}}$$

Exemple

$$K(\{0, 10\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Exercice 1.2 : ***Caractérisation de codages optimaux***

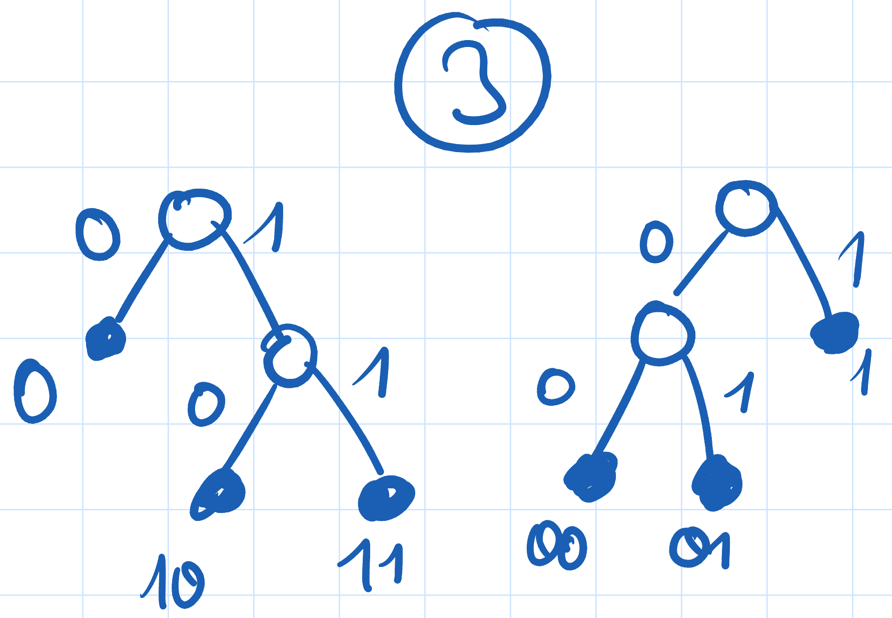
Q 2.1 Combien de feuilles possède l'arbre binaire d'un codage binaire préfixe optimal de m symboles ?

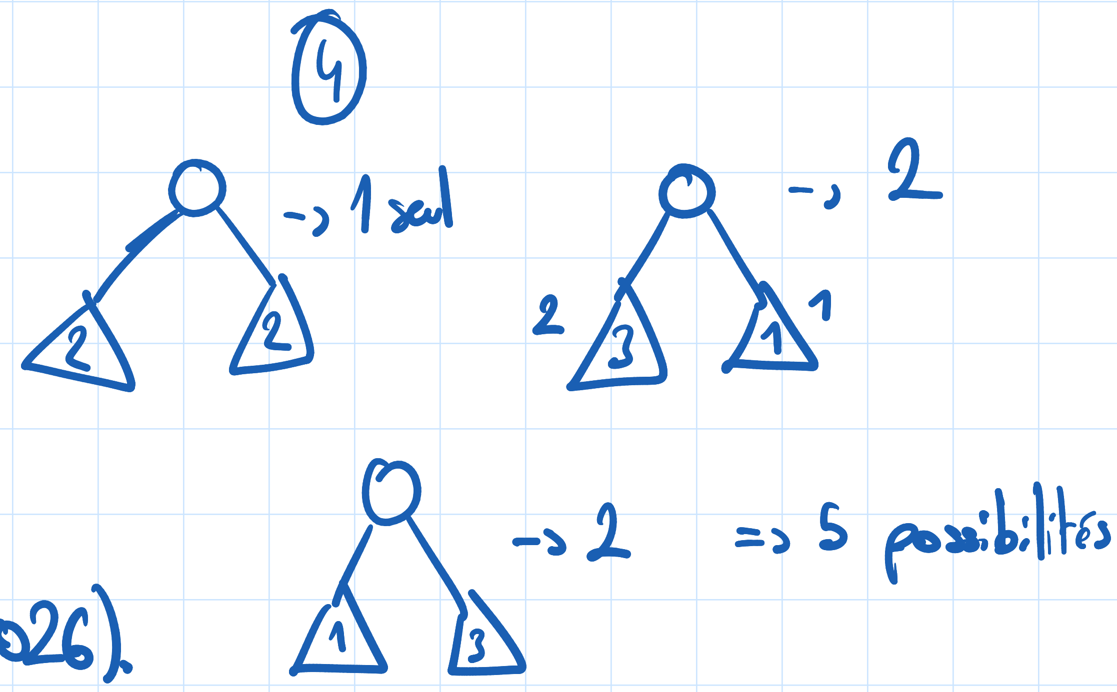
Q 2.2 Quelle est la particularité des arbres de codages binaires préfixes optimaux ?

Q 2.3 Quels sont les arbres des codages préfixes binaires optimaux d'une source de trois symboles ? de quatre symboles ?

Q 2.4 Dans un codage binaire optimal peut-il y avoir exactement trois mots de longueur maximale ?

Q 2.5 La distribution des longueurs des mots d'un codage préfixe binaire optimal est-elle unique ?





$$nb(n) = \sum_{i=0}^{n-1} nb(i)\, nb(n-i-1)$$

-> nombre de catalan (Vu en ASD le 16/03/2026).