

Chapitre 2 : Séries et intégrales

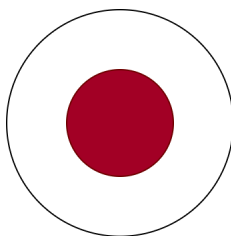
Romann Szczepaniak

January 11, 2026

1 Introduction

Pour calculer les probabilités discrètes, on va devoir calculer des séries, et des intégrales en proba continues

Exemple 1. *Le jeu de fléchettes :*



- *Proba de tomber dans le centre ?*
- *Temps nécessaire pour atteindre le centre*

2 Séries

2.1 Suites de nombres réels

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels

Définition 1 (Convergence d'une suite). *La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N, |a_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$*

Définition 2 (Divergence d'une suite). *La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ si*

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, a_n \geq M.$$

Et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Théorème 1. *Une suite croissante et majorée converge, et une suite décroissante et minorée converge*

Exemple 2. Imaginons un lancer de pièce infini, avec une proba p de tomber sur pile

a_n est la probabilité que le premier pile apparaisse au $n^{\text{ième}}$ lancer

On a alors : $a_n = (1 - p)^{n-1} p$

Si $p = 0$, $a_n = 0$

Si $p = 1$ $a_1 = 1, a_n = 0 \forall n \geq 2$

Sinon, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Modèle "succès-échec" : Epreuve de Bernoulli

2.2 Application au jeu de fléchettes

p = proba d'atteindre le centre de la cible

Le rayon du cercle rouge est 10mm, et le rayon du grand cercle est de 125mm. On modélise un tir de fléchette par un point au hasard dans le grand cercle (petit compris)

La probabilité p est le rapport de l'aire du petit cercle sur l'aire du grand cercle, donc

$$p = \frac{\mathcal{A}(\mathcal{C}_r)}{\mathcal{A}(\mathcal{C}_R)} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = 0,002.$$

La probabilité d'atteindre le centre pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer est $a_n = (1 - p)^{n-1} p$

2.3 Séries

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ qui est une somme partielle

Définition 3. On dit que la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles converge, et on note $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sa limite

Cas particulier : Série à terme positif

Si $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante car $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$

Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, alors la série $\sum a_n$ converge vers $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$. Si elle n'est pas majorée, elle converge vers $+\infty$

Série absolument convergente

Définition 4. La série $\sum a_n$ est absolument convergente si $\sum |a_n|$ est convergente

Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente

Remarque :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Si $\sum |a_n| < +\infty$ alors on peut sommer les termes de la série dans n'importe quel ordre

Exemple 3 (d'une série convergente mais pas absolument convergente). Si on prend $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$\text{alors } \sum a_n < +\infty \text{ mais } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Si la série $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors le terme général a_n converge vers 0

Exemple 4. Quelques séries

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha$$

$$- \text{ Si } \alpha \geq 0, \sum_{n=1}^{+\infty} +\infty$$

$$- \text{ Si } \alpha = 0, \text{ on a } S_n(0) = n$$

$$- \text{ Si } \alpha = 1, \text{ on a } S_n(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$- \text{ Si } \alpha = -1 \implies \text{Série harmonique, divergente}$$

$$- \text{ Si } \alpha = -2 \text{ converge}$$

$$- \text{ Si } -1 \leq \alpha \leq 0 \text{ alors } \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \text{ diverge}$$

$$- \text{ Si } \alpha < -1, \text{ alors } \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \text{ converge}$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$$

$$- \text{ Si } x = 1, S_n(1) = n + 1$$

$$- \text{ Si } x \neq 1, S_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ La série converge vers } \frac{1}{1 - x} \text{ si } |x| < 1$$

$$\underline{\text{Remarque}} : \sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = x^{n_0} + x^{n_0+1} + \dots = x^{n_0} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge vers } 1$$

Utilisation de la dérivée :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } S_n(x) &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ \Rightarrow S'_n &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} nx^{n+1} = 0 \text{ si } |x| < 1$$

$$|nx^{n+1}| = n|x|^{n+1} = e^{(n+1)\ln(|x|) + \ln(n)} = e^{(n+1)(\ln(|x|) + \frac{\ln(n)}{n+1})}$$

$$\underline{\text{Conclusion}} : \text{Si } |x| < 1 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

3 Intégrales