TD2 : Proba

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

$$\int_0^X e^{-x} dx = 1 - e^{-X}$$

$$\int_0^X x e^{-x} dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^X + \int_0^X e^{-x} dx$$

$$= -Xe^{-X} + \left[-e^{-x}\right]_0^X = -Xe^{-X} - e^{-X} + 1$$

$$= -(X+1)e^{-X} + 1$$

$\int_0^X x^2 e^{-x} dx$: double IPP, ok.

$$\int_{-a}^a \frac{1}{1+|x|} dx = -\int_{-a}^0 \frac{-1}{1-x} dx + \int_0^a \frac{1}{1+x} dx \text{ . Donc } \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^a \frac{1}{1+|x|} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{1+x} dx$$

$$\lim_{a \to +\infty} 2\left[\ln(1+x)\right]_0^a = 2\ln(1+a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$$

Plus simple : $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Donc $f(-x) = \frac{1}{1+|-x|} = \frac{1}{1+|x|} = f(x)$.

On intègre f (paire) sur un intervalle centré en 0. L'intégrale est donc nulle.

Soit $\alpha > 0$. On veut calculer :

$$I_1 = \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{y \to +\infty} \alpha \int_0^y e^{-\alpha x} dx$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[e^{-\alpha x}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A \to +\infty} -e^{-Ax} + 1 = 1$$

$$\text{car } \lim_{n \to +\infty} e^{-nx} = 0$$

$$I_2 = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} \, dx = \left[-x e^{-\alpha x} \right]_0^{+\infty} - \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx$$

$$= \underbrace{\lim_{A \to +\infty} -A e^{-Ax}}_{0} - I_1/\alpha = \frac{1}{\alpha}$$