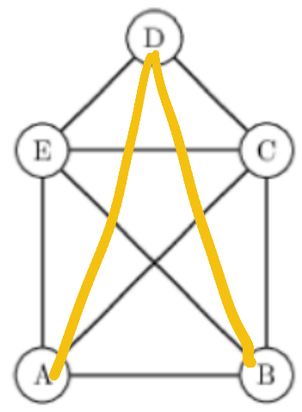
TD1 : Graphes

Préparer pt 3. + 1.4, 1.5

1 Découvrons les graphes

Exercice 1.1 Premiers pas

On considère le graphe suivant :



Q 1.1.1 Quel est l'ordre ? la taille ?

Q 1.1.2 Donner un chemin de longueur 4.

1. ordre : 5 , taille : 7
2. ({E,A}, {A,C}, {C,B}, {B,A})

Q 1.1.3 Quelle est la longueur du chemin élémentaire le plus long ? En donner un. 4 : A-B-C-E-D

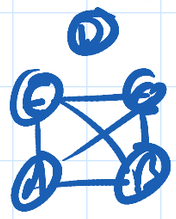
Q 1.1.4 Quelle est la longueur du chemin simple le plus long ? En donner un. 7 A-C-E-B-A-E-D-C-B

Q 1.1.5 Doner le cycle le plus court ? 3 : A-C-B

Q 1.1.6 Donner tous les cycles élémentaires. A-B-C, A-E-C, E-D-C, A-E-C-D, A-E-D-C-B

Q 1.1.7 Quel est le sommet de plus grand (petit) degré ? Donner le degré.

Q 1.1.8 Ce graphe est-il connexe ? Si oui, qu'ajouteriez-vous pour qu'il ne le soit plus ? Oui, on rompt (E)

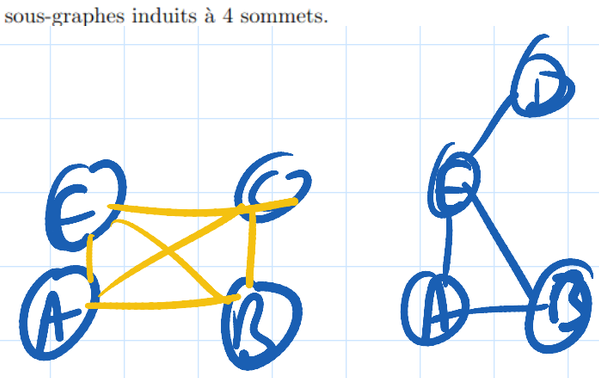


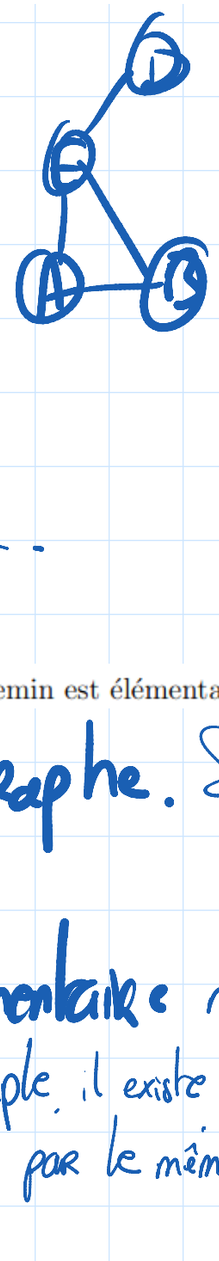
Q 1.1.9 Combien d'arêtes faut-il supprimer au minimum pour obtenir un graphe avec 2 composantes connexes. Dessiner ce graphe. 2

Q 1.1.10 Ce graphe est-il simple ? Sinon, trouver un sous-graphe qui soit simple. oui

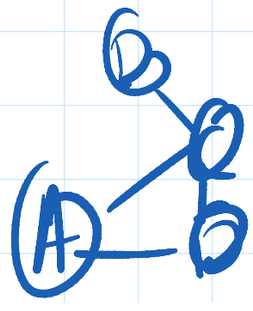
Q 1.1.11 Ce graphe est-il complet ? Sinon, quelles arêtes faut-il ajouter ? /

Q 1.1.12 Dessiner tous les sous-graphes induits à 4 sommets.





∩

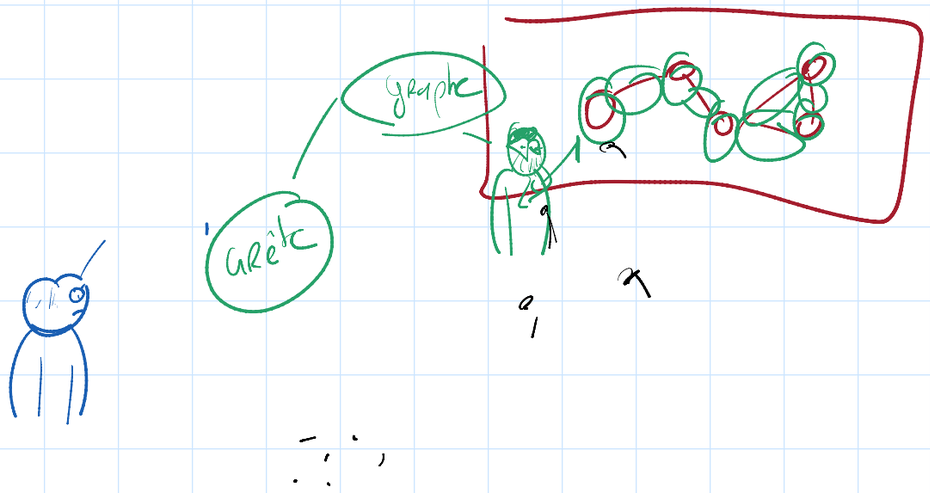


...

Q 1.2.1 Montrer que si un chemin est élémentaire, alors il est nécessairement simple.

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Soit $C=(v_0,\dots,v_n)$ un chemin élémentaire, càd :

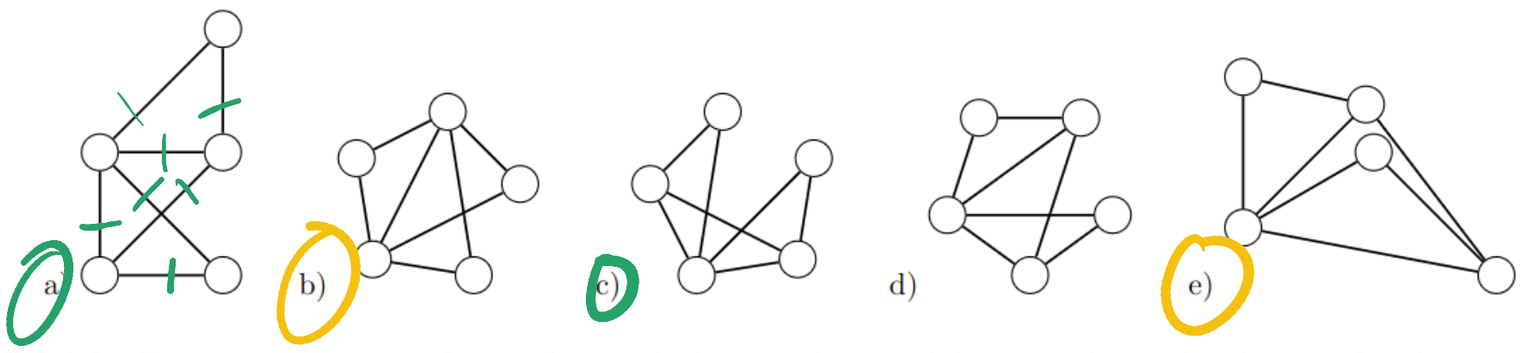
Si un chemin est élémentaire non simple, alors chaque sommet apparait au + une fois. Or, si il est non simple, il existe une arête qui apparait au moins deux fois. Si une arête apparait au moins 2 fois alors on passe au moins deux fois par le même sommet.



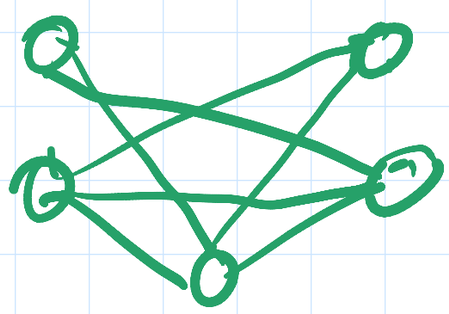
Définition 2 *Deux graphes non-orientés $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes s'il existe une application bijective $\phi : V \to V'$ telle que pour tout couple de sommets $u, v \in V^2$ on a $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E'$.*

Exercice 2.1 Isomorphisme

Q 2.1.1 Voici 5 graphes. Déterminer tous les couples de graphes isomorphes ?



Q 2.1.2 Proposer un autre graphe, non isomorphe à aucun de ceux ci-dessus, mais avec le même nombre de sommets et d'arêtes.



Exercice 1.3 A propos des degrés

Q 1.3.1 Quel est le degré des sommets d'un graphe (simple) complet d'ordre n ? La taille ?

Q 1.3.2 Montrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Lemme des poignées de main) *Soit $G = (V, E)$ un graphe (simple) non orienté quelconque, et $\mathcal{V} = \sum_{v \in V} deg(v)$ la somme des degrés des sommets de G. Alors on a*

$$\mathcal{V} = 2 \times |E|$$

1. $n-1$, $n(n-1)\frac{1}{2}$

2. $\mathcal{V} = \sum_{v \in V} deg(v)$ Le graphe a $K = |E|$ arêtes.

Q 1.3.3 Montrer le corollaire suivant.

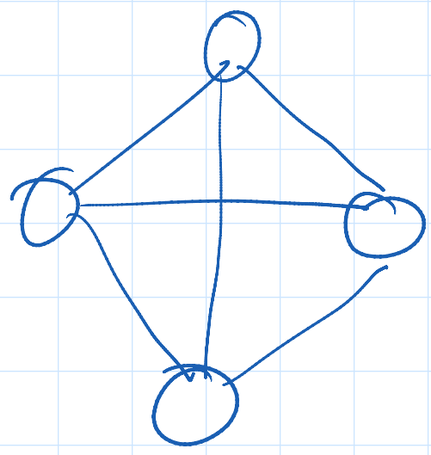
Corollaire 1 *Dans un graphe simple non orienté, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.*

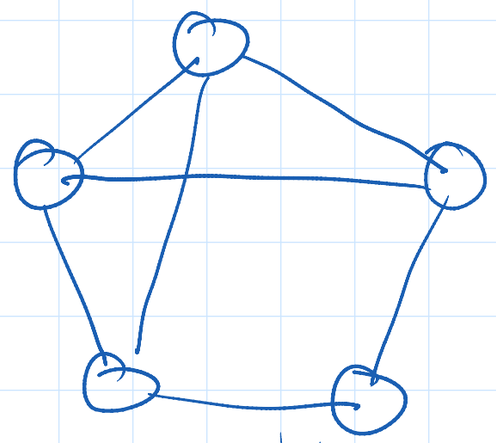
e2

Exercice 1.4 Graphes $k-$réguliers[1]

Définition 1 *Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit* régulier. *Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est $k-$*régulier.

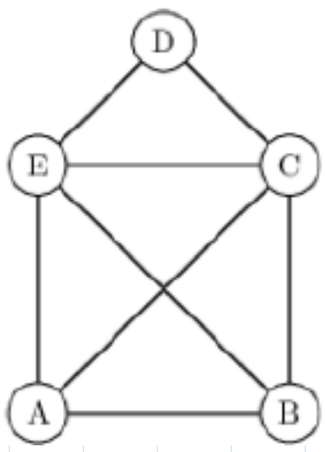
Q 1.4.1 On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Essayez de construire de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !





pas possible :c

Comme le nombre de sommets dont le degré impair est pair, il n'est pas possible de construire un tel graphe sur k impair



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	1
B	1	0	1	0	1
C	1	1	0	1	1
D	0	0	1	0	1
E	1	1	1	1	0

$= G$

Il faut que $G[i][i] = 0$ $\forall i \in \{0, \dots, |G|-1\}$

Exercice 3.2 Complexité

On suppose un graphe simple représenté par une matrice d'adjacence.

Q 3.2.1 Quelle est la complexité en temps d'obtention de la liste des voisins d'un sommet donné ? $\Theta(n)$ -> get_ligne_matrice(i)

Q 3.2.2 Comment déterminer à partir d'une matrice d'adjacence qu'un graphe est complet ?

Q 3.2.3 Quelle est la complexité en temps de votre algorithme qui décide si oui ou non un graphe est complet ? $\Theta(n^2)$

D : [E, C]

E : [D, C, A, B]

A : [E, C, B]

C : [D, E, C, A, B]

B : [A, C, E]

Il faut que

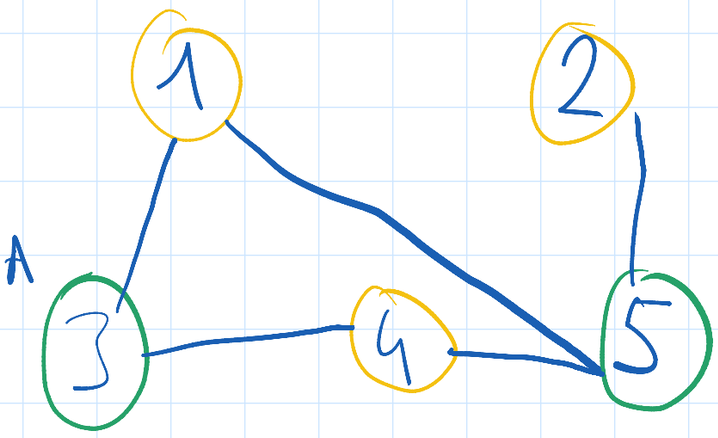
4 Graphes particuliers

Définition 3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit* biparti *si on peut diviser son ensemble de sommets en deux parties V_1 et V_2 tel qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de V_1 et aucune arête entre éléments de V_2 (autrement dit chaque arête a une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2).*

Exercice 4.1 Graphes biparti

Q 4.1.1 Proposer un algorithme qui détermine si un graphe est biparti ou non.

Q 4.1.2 Discuter de la complexité. $O(n^2)$



On prend un sommet, qui fera parti du groupe A

Tous ses voisins sont donc du groupe B.

Si on a un sommet dans A et dans B -> Return False, sinon RÉCURSIVEMENT

```
isBipart : G groupA groupB visited
    si ∃ v∈G voisin , v.v ∈ groupA
        false
    sinon
        ∀ v ∈ G.voisin do
            t ∧ isBipart (groupB+G.voisin) (groupA+[G.v]) (visited+[G.v]
```

Théorème 2 *Un graphe est* biparti *si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.*

Q 4.1.3 Proposer un nouvel algorithme qui détermine si un graphe est biparti ou non qui exploite cette propriété.