Feuille 1 de TD

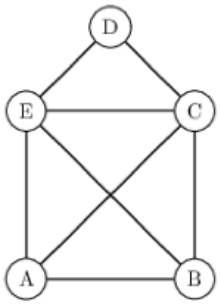
À faire avant la première séance sur cette feuille

- Exercice 1.1
- Exercice 1.2
- Exercice 2.1

1 Découvrons les graphes

Exercice 1.1 Premiers pas

On considère le graphe suivant :



Q 1.1.1 Quel est l'ordre ? la taille ?

Q 1.1.2 Donner un chemin de longueur 4.

Q 1.1.3 Quelle est la longueur du chemin élémentaire le plus long ? En donner un.

Q 1.1.4 Quelle est la longueur du chemin simple le plus long ? En donner un.

Q 1.1.5 Doner le cycle le plus court ?

Q 1.1.6 Donner tous les cycles élémentaires.

Q 1.1.7 Quel est le sommet de plus grand (petit) degré ? Donner le degré.

Q 1.1.8 Ce graphe est-il connexe ? Si oui, qu'ajouteriez-vous pour qu'il ne le soit plus ?

Q 1.1.9 Combien d'arêtes faut-il supprimer au minimum pour obtenir un graphe avec 2 composantes connexes. Dessiner ce graphe.

Q 1.1.10 Ce graphe est-il simple ? Sinon, trouver un sous-graphe qui soit simple.

Q 1.1.11 Ce graphe est-il complet ? Sinon, quelles arêtes faut-il ajouter ?

Q 1.1.12 Dessiner tous les sous-graphes induits à 4 sommets.

Exercice 1.2 Chemin élémentaire et chemin simple

Q 1.2.1 Montrer que si un chemin est élémentaire, alors il est nécessairement simple.

Q 1.2.2 Montrer que si un chemin est simple, alors il n'est pas nécessairement élémentaire.

Exercice 1.3 A propos des degrés

Q 1.3.1 Quel est le degré des sommets d'un graphe (simple) complet d'ordre n ? La taille ?

Q 1.3.2 Montrer le théorème suivant.

Théorème 1 (Lemme des poignées de main) *Soit $G = (V, E)$ un graphe (simple) non orienté quelconque, et $\mathcal{V} = \sum_{v \in V} deg(v)$ la somme des degrés des sommets de G. Alors on a*

$$\mathcal{V} = 2 \times |E|$$

.

Q 1.3.3 Montrer le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Dans un graphe simple non orienté, le nombre de sommets dont le degré est impair est toujours pair.*

Exercice 1.4 Graphes $k-$réguliers[1]

Définition 1 *Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit* régulier. *Si le degré commun est k, alors on dit que le graphe est $k-$*régulier.

Q 1.4.1 On s'intéresse aux graphes 3-réguliers. Essayez de construire de tels graphes ayant 4, 5, 6, puis 7 sommets. Qu'en déduisez-vous ? Prouvez-le !

Exercice 1.5 Application du principe des tiroirs

Le principe des tiroirs s'énonce ainsi : si l'on place davantage d'objets que de tiroirs, au moins un tiroir doit contenir plusieurs objets.

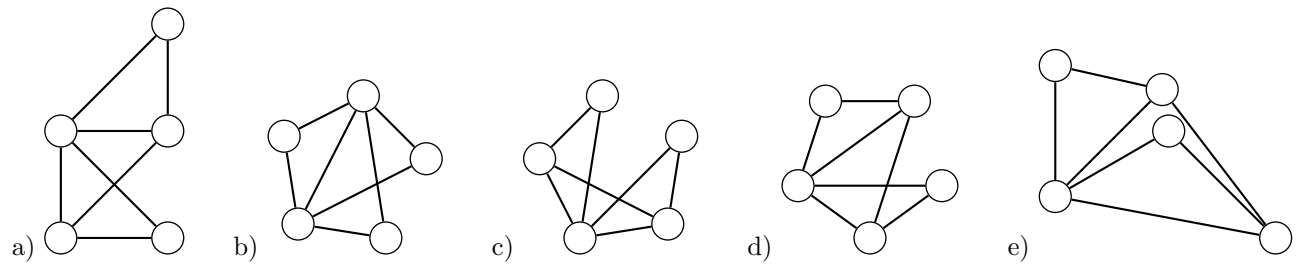
Considérons un graphe simple non orienté à $n \geq 2$ sommets. Montrer qu'au moins 2 sommets sont de même degré.

2 Isomorphisme de graphes

Définition 2 *Deux graphes non-orientés $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes s'il existe une application bijective $\phi : V \to V'$ telle que pour tout couple de sommets $u, v \in V^2$ on a $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E'$.*

Exercice 2.1 Isomorphisme

Q 2.1.1 Voici 5 graphes. Déterminer tous les couples de graphes isomorphes ?



Q 2.1.2 Proposer un autre graphe, non isomorphe à aucun de ceux ci-dessus, mais avec le même nombre de sommets et d'arêtes.

3 Structures de données et complexité

Exercice 3.1 Matrices d'ajacence

[1] Tiré de `http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/pedalyc/seqdocped/graphes/cahier/notions_base/notions_base_degsom.htm`

Q 3.1.1 Donner la représentation sous forme de matrice d'adjacence du graphe de l'exercice 1.

Q 3.1.2 Quelle propriété doit vérifier une matrice qui représente un graphe non orienté simple.

Exercice 3.2 Complexité

On suppose un graphe simple représenté par une matrice d'adjacence.

Q 3.2.1 Quelle est la complexité en temps d'obtention de la liste des voisins d'un sommet donné ?

Q 3.2.2 Comment déterminer à partir d'une matrice d'adjacence qu'un graphe est complet ?

Q 3.2.3 Quelle est la complexité en temps de votre algorithme qui décide si oui ou non un graphe est complet ?

Exercice 3.3 Listes d'adjacence

Q 3.3.1 Donner la représentation sous forme de listes d'adjacence du graphe de l'exercice 1.

Q 3.3.2 Citer un avantage d'utiliser cette représentation.

Exercice 3.4 Complexité

On suppose un graphe simple représenté par des listes d'adjacence.

Q 3.4.1 Quelle est la complexité en temps d'obtention du degré d'un sommet donné ?

Q 3.4.2 Quelle est la complexité en temps d'obtention de la taille du graphe ?

Q 3.4.3 Comment déterminer à partir d'une liste d'adjacence qu'un graphe est complet ?

Q 3.4.4 Quelle est la complexité en temps de votre algorithme qui décide si oui ou non un graphe est complet ?

4 Graphes particuliers

Définition 3 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit* biparti *si on peut diviser son ensemble de sommets en deux parties V_1 et V_2 tel qu'il n'y ait aucune arête entre éléments de V_1 et aucune arête entre éléments de V_2 (autrement dit chaque arête a une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2).*

Exercice 4.1 Graphes biparti

Q 4.1.1 Proposer un algorithme qui détermine si un graphe est biparti ou non.

Q 4.1.2 Discuter de la complexité.

On considère le théorème suivant (qu'on ne cherchera pas à démontrer).

Théorème 2 *Un graphe est* biparti *si et seulement s'il ne contient aucun cycle de longueur impaire.*

Q 4.1.3 Proposer un nouvel algorithme qui détermine si un graphe est biparti ou non qui exploite cette propriété.

Exercice 4.2 Graphes eulériens

On dit qu'un cycle d'un graphe G est *eulérien* si ce cycle passe une et une seule fois par chaque arête de G.

Q 4.2.1 Dessiner trois graphes (d'ordre 3,4,5) qui possèdent chacun un cycle eulérien. Indiquer à côté des sommets leur degré.

On dit qu'un graphe G est *eulérien* s'il possède un cycle eulérien.

Q 4.2.2 Énoncer une propriété sur les sommets d'un graphe $G = (V, E)$ qui, si elle est vérifiée, assure qu'on est en présence d'un graphe eulérien.

Exercice 4.3 Graphes hamiltoniens

On dit qu'un cycle d'un graphe G est *hamiltonien* si ce cycle passe une et une seule fois par chaque sommet de G.

Q 4.3.1 Dessiner trois graphes (d'ordre 3,4,5) qui possèdent chacun un cycle hamiltonien.

On dit qu'un graphe G est *hamiltonien* s'il possède un cycle hamiltonien.

Q 4.3.2 Citer un type de graphe qui soit hamiltonien ? Expliquer.

5 Réfléchissons

Exercice 5.1 Amitiés[2]

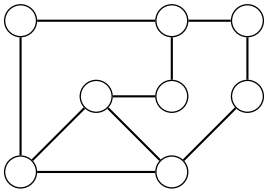
Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents (la relation d'amitié est considérée réciproque).

On pourra aborder la question en considérant le cas où toute personne a au moins un ami, exactement une personne n'a pas d'ami, puis plusieurs personnes n'ont pas d'ami.

Exercice 5.2 Surveillance

Une équipe de policiers doit surveiller des rues. Chacun est en capacité de surveiller les rues adjacentes à un carrefour. Les policiers sont placés sur ces carrefours.

Voici un exemple de rues (arêtes) et de carrefours (sommets) :



Q 5.2.1 Combien faut-il de policiers pour surveiller toutes les rues ?

Q 5.2.2 Les policiers doivent se déplacer chaque heure en effectuant une ronde passant par toutes les rues. Combien de rues traversera au minimum chaque policier ? Existe-t-il dans l'exemple une ronde qui permette d'atteindre ce minimum ?

Q 5.2.3 Un policier supplémentaire surveille que les autres policiers sont bien à leurs postes en effectuant une ronde également. Par combien de carrefour doit-il passer au minium ? Existe-il dans l'exemple une ronde qui permette d'atteindre ce minimum.

Exercice 5.3 Quelqu'un ment ![3]

Un crime a eu lieu dans une maison. La nuit du crime, 8 personnes étaient présentes (victime comprise). Chaque personne interrogée fournit un alibi consistant à nommer 3 personnes avec lesquelles elle était au moment du crime. L'inspecteur en déduit que nécessairement quelqu'un a menti.

Q 5.3.1 Trouver comment un graphe peut permettre de résoudre le problème.

[2]Tiré de *Introduction à la théorie des graphes*, Didier Müller, Cahiers de la CRM.

[3]Tiré de *Introduction à la théorie des graphes*, I. Larramendy Valverde et A. Marie-Jeanne, Ellipes